



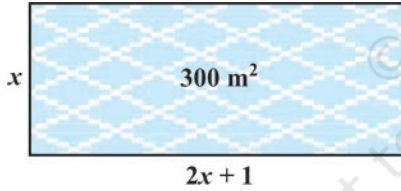
5013CH04

4

(QUADRATIC EQUATIONS) دودرجی مساواتیں

4.1 تعارف

باب 2 میں آپ نے مختلف قسم کی کثیر رکنیوں کے بارے میں پڑھا۔ جس میں ایک قسم دودرجی کثیر رکنی بھی تھی جو $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کی شکل کی ہوتی ہے۔ جب ہم اس کثیر رکنی کو صفر کے برابر رکھ دیتے ہیں تو یہ دودرجی مساوات بن جاتی ہے۔ جب ہم بہت سے روزمرہ کے مسائل کا سامنا کرتے ہیں تو دودرجی مساواتیں ابھر کر سامنے آتی ہیں۔ مثال کے طور پر



شکل 4.1

ایک خیراتی ٹرسٹ عبادت کے لیے ایک ایسا ہال بنانا چاہتا ہے جس کا کارپیٹ (تالین) کا رقبہ 300 مربع میٹر ہو اور اس کی لمبائی چوڑائی کے دو گنے سے 1 میٹر زیادہ ہو۔ تو ہال کی لمبائی اور چوڑائی کیا ہوگی؟ مان لیجیے ہال کی چوڑائی x میٹر ہے تب اس کی لمبائی ہوگی $(2x + 1)$ میٹر۔ اس مسئلہ کو تصویری طور پر ہم نے شکل 4.1 میں دکھایا ہے

$$\text{اب} \quad \text{ہال کا رقبہ} = x(2x + 1) = \text{مربع میٹر} = (2x^2 + x) \text{ مربع میٹر}$$

$$\text{اس لئے} \quad (2x^2 + x = 300) \quad (\text{دیا ہوا})$$

$$\text{اس لئے} \quad 2x^2 + x - 300 = 0$$

اس طرح سے ہال کی چوڑائی، مساوات $2x^2 + x - 300 = 0$ جو ایک دودرجی مساوات ہے، کو مطمئن کریں گی۔

بہت سے لوگوں کا یہ ماننا ہے کہ بابلونیئن (Babylonians) پہلے وہ لوگ تھے جنہوں نے دودرجی مساواتوں کو حل

کیا۔ مثال کے طور پر وہ جانتے تھے کیسے دو مثبت اعداد کو معلوم کیا جاسکتا ہے جن کا حاصل جمع مثبت ہو اور حاصل ضرب بھی مثبت ہو اور یہ مسئلہ دو درجی مساوات $x^2 - px + q = 0$ کو حل کرنے کے معادل ہے۔ یونانی ریاضی داں اقلیدس نے لمبائیاں، جو ہماری موجودہ اصطلاح میں دو درجی مساوات کا حل ہے، معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ نکالا۔ دو درجی مساواتوں کو حل کرنے کا سہرا، قدیم ہندوستانی ریاضی دانوں کے سر جاتا ہے۔ درحقیقت برہم گپتا (665 - 598 ب.ع. کے 1025) نے ایک فارمولہ معلوم کیا جو اب دو درجی فارمولہ کہلاتا ہے (جیسا کہ بھاسکر II سے کوٹ کیا گیا ہے) جس سے دو درجی مساواتوں کو کامل مربع کے طریقہ سے حل کیا جاتا ہے۔ ایک عرب ریاضی داں الخورزمی (تقریباً 800 عیسوی) نے بھی مختلف قسم کی دو درجی مساواتوں کا مطالعہ کیا Abrahm bar Hiyya Ha-Nasi نے اپنی کتاب 'Liber embadorum' جو 1145 میں یورپ میں چھپی، میں مختلف دو درجی مساواتوں کا حل دیا۔

اس باب میں آپ دو درجی مساواتوں کے بارے میں پڑھیں گے اور ان کے حل مختلف طریقوں کے ذریعہ سے معلوم کریں گے۔ آپ روزمرہ کے مسئلوں کو حل کرنے میں اس کے استعمال کے بارے میں بھی سیکھیں گے۔

4.2 دو درجی مساوات

متغیر x میں دو درجی مساوات وہ مساوات ہے جس کی شکل $ax^2 + bx + c = 0$ کی ہوتی ہے جہاں a, b, c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ مثال کے طور پر $2x^2 + x - 300 = 0$ ایک دو درجی مساوات ہے اسی طرح $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ، $4x - 3x^2 + 2 = 0$ اور $1 - x^2 + 300 = 0$ بھی دو درجی مساواتیں ہیں۔

درحقیقت کوئی بھی $p(x) = 0$ کی شکل کی مساوات جہاں $p(x)$ درجہ 2 کی کثیررکنی ہے، دو درجی مساوات ہے۔ لیکن جب ہم $P(x)$ کی ارکان کو درجہ کے حساب سے سے گھٹی ہوئی ترتیب میں لکھتے ہیں تب ہمیں مساوات کی معیاری شکل حاصل ہوتی ہے۔ یعنی $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a \neq 0$ یہ دو درجی کی معیاری شکل کہلاتی ہے۔

ہمارے ارد گرد کی دنیا کے ریاضی کے مختلف میدانوں میں ہمیں دو درجی مساواتوں کی بہت سی صورت حال ملیں گی۔ آئیے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: مندرجہ ذیل صورت حال کو ریاضیاتی طور پر ظاہر کیجیے۔

(i) جون اور جیوانتی کے پاس 45 ماربل ہیں۔ دونوں 5، 5 ماربل کھودیتے ہیں اور ان کے پاس باقی بچے ماربل کا حاصل

ضرب 124 ہے۔ ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ شروعات میں ان دونوں کے پاس کتنے ماربل تھے۔
(ii) ایک کاٹج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ کھلونے بناتے ہے۔ ہر ایک کھلونہ کو بنانے میں ہوا خرچ (روپیوں میں) ایک دن میں بنے کھلونوں کی تعداد سے 55 کم ہے۔ کسی ایک دن کھلونہ بنانے کا کل خرچ 750 روپے ہے۔ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ اس دن کل کتنے کھلونے بنائے گئے۔

حل:

(i) مان لیجئے جون کے پاس x ماربل تھے

تو جیونتی کے پاس ماربل ہوئے $(45 - x)$ (کیوں؟)

جب جون نے 5 ماربل کھودے تو اس کے پاس بچے ماربل $x - 5 =$

جب 5 ماربل کھو گئے تو جیونتی کے پاس بچے کل ماربل $45 - x - 5 =$

$$40 - x =$$

اس لئے ان کا حاصل ضرب $(x - 5)(40 - x) =$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

اس لئے $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (دیا ہوا ہے، کے حاصل ضرب 124)

$$-x^2 + 45x - 324 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$x^2 - 45x + 324 = 0 \quad \text{یعنی}$$

اس لئے جون کے پاس جو ماربل ہوں گے وہ دو درجی مساوات $x^2 - 45x + 324 = 0$ کو مطمئن کریں گے

جو کہ مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

(ii) مان لیجئے اس دن بنے کھلونوں کی تعداد x ہے

اس لئے اس دن ہر ایک کھلونہ بنانے کا خرچ (روپیوں میں) $55 - x =$ ہے

اس لئے اس دن بنے کھلونوں کا کل خرچ $x(55 - x) =$

$$x(55 - x) = 750$$

اس لئے

$$55x - x^2 = 750$$

یعنی

$$-x^2 + 55x - 750 = 0$$

یعنی

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

یعنی

اس لئے اس دن بننے کھلونوں کی تعداد دو درجی مساوات $x^2 - 55x + 750 = 0$ کو مطمئن کرے گی جو کہ مسئلہ کا مطلوبہ ریاضیاتی اظہار ہے۔

مثال 2: جانچ کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل دو درجی مساواتیں ہیں یا نہیں۔

$$x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2) \quad \text{(ii)}$$

$$(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3 \quad \text{(i)}$$

$$(x + 2)^3 = x^3 - 4 \quad \text{(iv)}$$

$$x(2x + 3) = x^2 + 1 \quad \text{(iii)}$$

حل:

$$\text{LHS} = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5 \quad \text{(i)}$$

اس لئے $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ کو لکھا جاسکتا ہے۔

$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \text{یعنی}$$

جو $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل ہے۔

اس لئے دی ہوئی مساوات دو درجی مساوات ہے۔

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4 \quad \text{اور} \quad x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8 \quad \text{(ii)}$$

$$x^2 + x + 8 = x^2 - 4 \quad \text{اس لئے}$$

$$x + 12 = 0 \quad \text{یعنی}$$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی نہیں ہے اس لئے یہ دو درجی مساوات نہیں ہے۔

$$\text{LHS} = x(2x+3) = 2x^2 + 3x \quad \text{(iii) یہاں}$$

$$x(2x+3) = x^2 + 1 \quad \text{اس لئے}$$

$$2x^2 + 3x = x^2 + 1$$

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \text{اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے}$$

$$\text{یہ } ax^2 + bx + c = 0 \text{ کی شکل کی ہے}$$

اس لئے یہ دو درجی مساوات ہے۔

$$\text{LHS} = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \quad \text{(iv)}$$

$$(x+2)^3 = x^3 - 4 \quad \text{اس لئے}$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ یا } 6x^2 + 12x + 12 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$\text{یہ } ax^2 + bx + c = 0 \text{ کی شکل کا ہے۔}$$

اس لئے یہ دو درجی مساوات ہیں۔

ریمارک: (ii) کے بارے میں خبردار! اس میں دی ہوئی مساوات دو درجی نظر آرہی ہے لیکن یہ دو درجی نہیں ہے اسی طرح (iv) کی مساوات دیکھنے میں کبھی مساوات نظر آتی ہے (درجہ 3 والی مساوات) لیکن یہ دو درجی مساوات نکلی، جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی مساوات کے بارے میں کوئی نظریہ قائم کرنے سے پہلے اس کو مختصر کر لیجیے۔

مشق 4.1

1- جانچ کیجئے کہ مندرجہ ذیل میں کون سی مساواتیں دو درجی ہیں:

$$(i) (x+1)^2 = 2(x-3)$$

$$(ii) x^2 - 2x = (-2)(3-x)$$

$$(iii) (x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$$

$$(iv) (x-3)(2x+1) = x(x+5)$$

$$(v) (2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$$

$$(vi) x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$$

$$(vii) (x+2)^3 = 2x(x^2 - 1)$$

$$(viii) x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$$

2۔ مندرجہ ذیل صورت حال کو دو درجی مساوات کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) ایک مستطیل کی شکل والے پلاٹ کا رقبہ $528m^2$ ہے۔ اس پلاٹ کی لمبائی (میٹروں میں) اس کی چوڑائی کے

دگنے سے 1 زیادہ ہے ہمیں پلاٹ کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(ii) دو لگا تار مثبت صحیح اعداد کا حاصل ضرب 306 ہے۔ ہمیں صحیح اعداد معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

(iii) روہن کی ماں اس سے عمر میں 26 سال بڑی ہے۔ 3 سال بعد ان کی عمروں (سالوں میں) کا حاصل ضرب

360 ہوگا۔ ہم روہن کی موجودہ عمر معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

(iv) ایک ٹرین 480 کلومیٹر کا فاصلہ یکساں رفتار سے طے کرتی ہے۔ اگر اس کی رفتار 8 کلومیٹر فی گھنٹہ کم ہوتی ہے تو وہی

فاصلہ طے کرنے میں 3 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے ہمیں ٹرین کی رفتار معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

4.3 اجزائے ضربی کے طریقہ سے دو درجی مساوات کا حل

دو درجی مساوات $2x^2 - 3x + 1 = 0$ پر غور کیجئے۔ اگر ہم اس مساوات کی LHS میں x کی جگہ 1 رکھ دیں تو ہمیں ملتا ہے

$$RHS = (2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$$

کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 1$ کا صفر ہے

عمومی طور پر ایک حقیقی عدد α دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ کا جزر کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ $x = \alpha$ دو درجی مساوات کا حل ہے یا α دو درجی مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔ یہ بات نوٹ کیجیے کہ دو

درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اور دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ایک ہی ہوتے ہیں۔

باب 2 میں آپ نے مشاہدہ کیا تھا کہ دو درجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں اس لئے کسی بھی دو درجی

مساوات کے زیادہ سے زیادہ دو جزر ہو سکتے ہیں۔

نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ وسطی رکن کو منقسم کر کے ہم کس طرح دو درجی کثیر رکنی کے اجزائے ضربی بناتے ہیں۔

ہم اس علم کو دو درجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کے لئے استعمال کریں گے۔

آئیے دیکھتے ہیں کیسے۔

مثال 3: اجزائے ضربی کے طریقہ سے دو درجی مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل: آئیے وسطی رکن $-5x$ کو $(-2x - 3x)$ میں منقسم کرتے ہیں [کیونکہ $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$]

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 = 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$$

اب $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو ہم $(2x - 3)(x - 1) = 0$ کی طرح لکھ سکتے ہیں

یعنی یا تو $(2x - 3) = 0$ یا $(x - 1) = 0$

اب $2x - 3 = 0$ سے ہمیں $x = \frac{3}{2}$ ملتا ہے اور $x - 1 = 0$ سے $x = 1$ ملتا ہے

دوسرے لفظوں میں 1 اور $\frac{3}{2}$ مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر ہیں،

تصدیق کیجئے یہ دی ہوئی مساوات کے جذر ہیں۔

نوٹ کیجئے ہم نے $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر $2x^2 - 5x + 3$ اجزائے ضربی میں تحلیل کر کے دو خطی

اجزائے ضربی بنائیے اور ہر جزو ضربی کو صفر کے برابر رکھئے پھر معلوم کرتے ہیں۔

مثال 4: دو درجی مساوات $6x^2 - x - 2 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$$

$$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$

$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

$$6x^2 - x - 2 = 0 \text{ کے جزر } x \text{ کی قدریں ہیں جس کے لئے } (3x - 2)(2x + 1) = 0$$

اس لئے، $3x - 2 = 0$ یا $2x + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ یا } x = \frac{2}{3} \text{ یعنی}$$

اس لئے $6x^2 - x - 2 = 0$ کے جزر ہیں $\frac{2}{3}$ اور $-\frac{1}{2}$ ۔

ہم جڑوں کی تصدیق اس طرح کر سکتے ہیں، ان کی قدریں مساوات $6x^2 - x - 2 = 0$ میں رکھ کر دیکھیں کہ وہ اس کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں۔

مثال 5: دو درجی مساوات $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ کے جزر معلوم کیجیے۔

حل:

$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$$

$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

اس لئے مساوات کے جزر x کی وہ قدریں ہیں جن کے لئے

$$(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ یا } \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$$

اس لئے جڑوں کی تکرار ہے، ہر ایک تکراری جزو ضربی $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ کے لئے

$$\text{اس لئے } 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0 \text{ کے جزر ہیں } \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$$

مثال 6: سیکشن 4.1 میں لئے گئے عبادت کے ہال کے ابعاد معلوم کیجیے

حل: سیکشن 4.1 میں ہم نے پایا تھا کہ اگر ہال کی چوڑائی x m، تب مساوات $2x^2 + x - 300 = 0$ کو مطمئن کرے گا

اجزائے ضربی کے طریقہ کا استعمال کرنے پر ہم مساوات کو لکھتے ہیں۔

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

$$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

$$(x - 12)(2x + 25) = 0 \quad \text{یعنی}$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جزر ہیں $x = 12$ یا $x = -12.5$ کیونکہ x ہال کی چوڑائی ہے اس لئے یہ منفی نہیں ہو سکتی

اس لئے ہال کی چوڑائی 12 میٹر ہے اور اس کی لمبائی $25 = 2x + 1$ میٹر ہے۔

مشق 4.2

1- اجزائے ضربی کے طریقہ سے مندرجہ ذیل دورجی مساواتوں کو حل کیجیے۔

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2- مثال 1 میں دئے گئے سوالوں کو حل کیجیے۔

3- دو عدد معلوم کیجئے جن کا حاصل جمع 27 ہے اور حاصل ضرب 182 ہے۔

4- دو لگا تار مثبت صحیح اعداد معلوم کیجئے جن کے مربعوں کا حاصل جمع 365 ہے۔

5- ایک قائم مثلث کا ارتفاع اس کے قاعدہ سے 7 سینٹی میٹر کم ہے۔ اگر اس کا وتر 13 سینٹی میٹر ہے تو باقی دو ضلع معلوم کیجیے۔

6- ایک کالج انڈسٹری (cottage industry) ایک دن میں کچھ برتن بناتی ہے، یہ مشاہدہ کیا جاتا ہے کہ کسی ایک دن ہر ایک ایک برتن کے بنانے کا خرچ (روپیوں میں) اس دن بنے برتنوں کے دگنے سے 3 زیادہ ہے۔ اگر اس دن برتن بنانے کا کل خرچ 90 روپے ہے تو اس دن بنے برتنوں کی کل تعداد اور ہر برتن کا خرچ معلوم کیجیے۔

4.4 دورجی مساواتوں کا حل مربع کو مکمل کر کے

پچھلے سیکشن میں آپ نے دورجی مساوات کے جزر معلوم کرنے کا ایک طریقہ سیکھا۔ اس سیکشن میں ہم ایک اور طریقہ سیکھیں گے۔ مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کیجیے۔

سنیتا کی دو سال پہلے کی عمر (سالوں میں) اور چار سال بعد کی عمر کا حاصل ضرب اس کی موجودہ عمر کا دگنا ہے اس کی موجودہ عمر کیا ہے؟

اس کا جواب دینے کے لیے مان لیجیے اس کی موجودہ عمر (سالوں میں) x ہے تب اس کی دو سال پہلے کی عمر اور چار سال

بعد کی عمر کا حاصل ضرب ہوگا $(x - 2)(x + 4)$

اس لیے $(x - 2)(x + 4) = 2x + 1$

یعنی $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

یعنی $x^2 - 9 = 0$

اس لیے سنیتا کی موجودہ عمر دورجی مساوات $x^2 - 9 = 0$ کو مطمئن کرتی ہے

ہم اس کو $x^2 = 9$ لکھ سکتے ہیں جڑ مربع لینے پر $x = 3$ یا $x = -3$ کیونکہ عمر مثبت صحیح عدد ہے اس لیے $x = 3$ اس لیے سنیتا کی موجودہ عمر 3 سال ہے

اب مساوات $(x+2)^2 - 9 = 0$ پر غور کیجیے۔ اس کو حل کرنے کے لیے ہم $(x+2)^2 = 9$ لکھ سکتے ہیں،

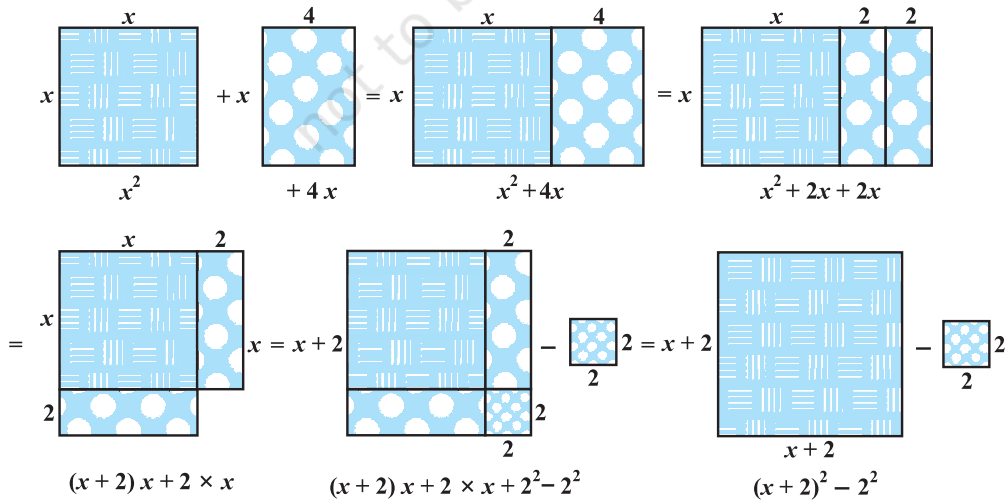
جڑ مربع لینے پر ہمیں ملتا ہے $x+2 = 3$ یا $x+2 = -3$

اس لیے $x = 1$ یا $x = -5$

اس لیے مساوات $(x+2)^2 - 9 = 0$ کے ہیں 1 اور -5

اوپر دی گئی دونوں مثالوں میں وہ رکن جس میں x ہے پوری طرح مربع کے اندازہ ہے۔ اس لیے ہم نے آسانی سے جڑ مربع لے کر جڑ معلوم کر لیے۔ لیکن اگر ہم سے دو درجی مساوات $x^2 + 4x - 5 = 0$ کے جڑ معلوم کرنے کو کہا جائے تو کیا ہوگا؟ یقیناً ہم ایسا کرنے کے لیے اجزائے ضربی کے طریقہ کا استعمال کریں گے جب تک کہ ہم یہ نہ جان لیں (کسی طرح) کہ $x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9$ ہے۔

اس لیے $x^2 + 4x - 5 = 0$ کو حل کرنا معادل ہے $(x+2)^2 - 9 = 0$ کو حل کرنے کے جو ہم دیکھ چکے ہیں کہ بہت آسان ہے اور تیزی سے ہو سکتا ہے۔ دراصل ہم کسی بھی دو درجی مساوات کو $(x+a)^2 - b^2 = 0$ کی شکل میں بدل سکتے ہیں۔ اور پھر ہم آسانی سے جڑ معلوم کر سکتے ہیں۔ آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا یہ آسان ہے۔ شکل 4.2 دیکھیے۔



شکل 4.2

عمل ذیل میں دیا گیا ہے

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x &= \left(x^2 + \frac{4}{2}x\right) + \frac{4}{2}x \\
 &= x^2 + 2x + 2x \\
 &= (x+2)x + 2 \times x \\
 &= (x+2)x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2 \\
 &= (x+2)x + (x+2) \times 2 - 2 \times 2 \\
 &= (x+2)(x+2) - 2^2 \\
 &= (x+2)^2 - 4
 \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$$

اس لئے $x^2 + 4x - 5 = 0$ کو ہم $(x+2)^2 - 9 = 0$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ فاصل مربع کے طریقہ سے، اس کو ہم کامل مربع کا طریقہ کہتے ہیں۔ مختصراً ہم اس کو ذیل میں دکھاتے ہیں:

$$x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

$$x^2 + 4x - 0 \text{ کو لکھا جاسکتا ہے}$$

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

$$(x+2)^2 - 9 = 0 \quad \text{یعنی}$$

اب مساوات $3x^2 - 5x + 2 = 0$ پر غور کیجیے، نوٹ کیجیے کہ x^2 کا ضریب کامل مربع نہیں ہے۔ اس لئے ہم مساوات کو دونوں طرف 3 سے ضرب کرتے ہیں۔

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

$$9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6 \quad \text{اب}$$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

اس لئے $9x^2 - 15x + 6 = 0$ کو لکھا جاسکتا ہے

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{یعنی}$$

اس لئے $9x^2 - 15x + 6 = 0$ کے جذور وہی ہیں جو $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ کے ہیں

$$3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad 3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{یعنی}$$

(ہم اس کو اس طرح سے لکھ سکتے ہیں $3x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$ جہاں $\pm$ کا مطلب ہے 'جمع نفی')

$$3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad 3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{اس طرح}$$

$$x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \quad \text{یا} \quad x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \quad \text{اس لئے}$$

$$x = \frac{4}{6} \quad \text{یا} \quad x = 1 \quad \text{اس لئے}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad x = 1 \quad \text{یعنی}$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جذور ہیں 1 اور $\frac{2}{3}$

ریمارک: اس عمل کو دوسرے طریقہ سے ہم ذیل میں دکھاتے ہیں

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{مساوات وہی ہے جو}$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3} \quad \text{ب}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

اس لئے $3x^2 - 5x + 2 = 0$ کے حل وہی ہیں جو $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ کے ہیں۔

جو ہیں $x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6}$ یعنی $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ اور $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

آئیے اس عمل کی مزید وضاحت کے لئے کچھ مثالیں لیتے ہیں

مثال 7: مثال 3 میں دی گئی مساوات کو کامل مربع کے طریقے سے حل کیجیے۔

حل: مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ وہی ہے جو $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

اس لئے $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ بھی لکھا جاسکتا ہے۔

اس لئے مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کے جزر بالکل وہی ہوں گے جو $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ کے ہیں

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \text{ وہی جو } \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \text{ یا } x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$$

$$x = 1 \text{ یا } x = \frac{3}{2}$$

اس لئے مساوات کے حل ہیں 1 اور $x = \frac{3}{2}$

آئیے حلوں کی تصدیق کرتے ہیں

$$x = \frac{3}{2} \text{ کو } 2x^2 - 5x + 3 = 0 \text{ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے } 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0 \text{ جو صحیح ہے، اسی}$$

طرح سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ $x = 1$ دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

مثال 7 میں ہم نے مساوات $2x^2 - 5x + 3 = 0$ کو دونوں طرف 2 سے تقسیم کیا تھا جس سے ہمیں $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ حاصل ہوتا ہے اور پہلا رکن کامل مربع ہو جاتا ہے اور پھر مربع کو مکمل کرتے ہیں۔ اس کے بجائے ہم دونوں طرف 2 سے ضرب کر کے پہلے رکن کو $(2x)^2 = 4x^2$ کامل مربع بنا کر پھر مکمل کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ کی وضاحت اگلی مثال میں کی گئی ہے۔

مثال 8: مساوات $5x^2 - 6x - 2 = 0$ کے جذور مربع مکمل کرنے (کامل مربع) کے طریقہ سے معلوم کیجیے۔

حل: مساوات کے دونوں طرف 5 سے ضرب کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$25x^2 = 30x - 10 = 0$$

یہ مساوات ایسی ہے جیسے

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

$$(5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$(5x - 3)^2 - 19 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$(5x - 3)^2 = 19 \quad \text{یعنی}$$

$$5x - 3 = \pm \sqrt{19} \quad \text{یعنی}$$

$$5x = 3 \pm \sqrt{19} \quad \text{یعنی}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5} \quad \text{اس لئے}$$

$$\text{اس لئے جڑ ہیں } \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \text{ اور } \frac{3 + \sqrt{19}}{5}$$

$$\text{تصدیق کیجیے کہ جڑ ہیں } \frac{3 - \sqrt{19}}{5} \text{ اور } \frac{3 + \sqrt{19}}{5}$$

مثال 9: مربع مکمل کرنے کے طریقہ سے $4x^2 + 3x + 5 = 0$ کے جڑ معلوم کیجیے۔

حل: نوٹ کیجیے کہ $4x^2 + 3x + 5 = 0$ وہی جو

$$2x^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{16} < 0 \quad \text{یعنی}$$

لیکن $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے منفی نہیں ہو سکتا (کیوں؟) اس لئے x کی کوئی ایسی حقیقی قدر نہیں ہے جو

دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرے۔ اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جز نہیں ہوں گے۔

اب آپ نے مربع مکمل کرنے کے طریقہ کی بہت سی مثالیں دیکھ لیں۔ آئیے اب اس طریقے کو عمومی بناتے ہیں۔

دور جی مساوات $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ پر غور کیجیے۔ دونوں طرف a سے تقسیم کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{یہ وہی ہے جسے}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{یعنی}$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے جز وہی ہوں گے جو مساوات

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{یعنی} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ تب (1) کا جز را مربع لینے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اس لئے}$$

اس لئے مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جڑ ہیں $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اگر

$b^2 - 4ac \geq 0$ اگر $b^2 - 4ac < 0$ تو مساوات کے حقیقی جڑ نہیں ہوں گے (کیوں؟)

اس طرح اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ ، تب دو درجی مساوات کے حقیقی جڑ ہیں $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

دو درجی مساوات کے جڑ معلوم کرنے کا یہ فارمولہ دو درجی فارمولہ کہلاتا ہے۔

آئیے کچھ مثالیں لے کر اس فارمولہ کی وضاحت کریں۔

مثال 10: مشق 4.1 کا سوال نمبر 2(i) کو دو درجی فارمولہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل: مان لیجئے پلاٹ کی چوڑائی x میٹر ہے تب لمبائی $(2x + 1)$ میٹر ہے تب ہمیں دیا ہوا ہے کہ $x(2x + 1) = 528$ یعنی

$$2x^2 + x - 528 = 0$$

یہ $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل ہے جہاں $a = 2$ ، $b = 1$ ، $c = -528$

اس لئے دو درجی فارمولہ سے ہمیں حل ملتے ہیں۔

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$x = \frac{-66}{4} \text{ یا } x = \frac{64}{4} \quad \text{یعنی}$$

$$x = \frac{-66}{4} \text{ یا } x = 16 \quad \text{یعنی}$$

کیونکہ x منفی نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ پلاٹ کی چوڑائی ہے اس لئے پلاٹ کی چوڑائی 16 میٹر اور پھر لمبائی 33 میٹر ہے۔

آپ ان قدروں کی تصدیق مساوات کو مطمئن کر سکتے ہیں۔

مثال 11: دو لگاتار (مسل) مثبت طاق صحیح اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا حاصل جمع 290 ہے۔

حل: مان لیجئے دو مثبت صحیح طاق اعداد میں چھوٹا عدد x ہے تب دوسرا صحیح عدد $x + 2$ ہوگا۔ سوال کے مطابق

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290 \quad \text{یعنی}$$

$$2x^2 + 4x - 286 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0 \quad \text{یعنی}$$

جو کے x میں ایک دو درجی مساوات ہے۔

دو درجی فارمولہ کو استعمال کرنے سے ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$$x = -13 \text{ یا } x = 11$$

یعنی

لیکن کیونکہ x ایک مثبت طاق صحیح عدد ہے اس لئے $x \neq -13$ یعنی $x = 11$

اس لئے دو مسلسل طاق صحیح اعداد ہیں 11 اور 13

$$11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290 \quad \text{جانچ:}$$

مثال 12: ایک مستطیل نما پارک کو اس طرح ڈیزائن کیا جاتا ہے کہ اس کی چوڑائی اس کی لمبائی سے 3 میٹر کم ہو اور اس کا رقبہ پہلے ہی سے بنے مساوی الساقین مثلث نما پارک کے رقبہ سے 4 میٹر زیادہ ہے جبکہ مثلث کا قاعدہ وہی ہے جو مستطیل کی چوڑائی ہے اور اس کا ارتفاع 12 میٹر ہے۔ اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجئے مستطیل نما پارک کی چوڑائی x میٹر ہے۔

$$\text{اس لئے اس کی لمبائی} = (x + 3)$$

$$\text{اس لئے مستطیل پارک کا رقبہ} = x(x + 3) \text{ m}^2 = (x^2 + 3x) \text{ m}^2$$

اب مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ہے x m

$$\text{اس لئے اس کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x \text{ m}^2$$

ہماری ضرورت کے مطابق

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \text{یعنی}$$

دو درجی فارمولہ کرنے سے ہمیں ملتا ہے

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ یا } -1$$

لیکن $x \neq -1$ (کیوں؟) اس لئے $x = 4$

اس لئے پارک کی چوڑائی = 4 میٹر اور اس کی لمبائی 7 میٹر ہوگی۔

تصدیق: مستطیل نما پارک کا رقبہ = 28m^2

$$\text{مثلاً نما پارک کا رقبہ} = 24\text{m}^2 = (28 - 4)\text{m}^2$$

مثال 13: دو درجی فارمولہ کی مدد سے مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے جز معلوم کیجیے اگر موجود ہوں۔

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (i) \quad x^2 + 4x + 5 = 0 \quad (ii) \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad (iii)$$

حل:

$$(i) \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{جہاں } a = 3, b = -5, c = 2 \quad \text{اس لئے } b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$\text{اس لئے } x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \text{یعنی } x = 1 \text{ یا } x = \frac{2}{3}$$

اس لئے جز $\frac{2}{3}$ اور 1 ہیں

$$(ii) \quad x^2 + 4x + 5 = 0 \quad \text{یہاں } a = 1, b = 4, c = 5 \quad \text{اس لئے } b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$$

کیونکہ کسی بھی حقیقی عدد کا مربع منفی نہیں ہو سکتا اس لئے $\sqrt{b^2 - 4ac}$ کی کوئی حقیقی قدر نہیں ہوگی۔

اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جز نہیں ہیں۔

$$(iii) \quad 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad \text{یہاں } a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$$

$$\text{اس لئے } b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$$

$$\text{اس لئے } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{یعنی } x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$$

اس لئے جز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہیں

مثال 14: مندرجہ ذیل مساواتوں کے جز معلوم کیجیے۔

$$x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0 \quad (i) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2 \quad (ii)$$

حل:

$$(i) \quad x + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{دونوں طرف } x \text{ سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔}$$

$$x^2 + 1 = 3x$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \text{یعنی جو کے ایک دو درجی مساوات ہے}$$

$$a = 1, b = 3, c = 1 \quad \text{یہاں}$$

$$b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0 \quad \text{اس لئے}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{اس لئے } (x \text{ کیوں؟})$$

$$\text{اس لئے جز ہیں } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ اور } \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$$

جیسے کے، $x \neq 0, 2$ مساوات کو $x(x-2)$ سے ضرب کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$

$$= 3x^2 - 6x$$

اس لئے دی ہوئی مساوات $3x^2 - 6x + 2 = 0$ میں تحلیل ہوگئی جو ایک دو درجی مساوات ہے۔

$$b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0 \quad \text{اس لئے } a = 3, b = -6, c = 2 \quad \text{یہاں}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \quad \text{اس لئے}$$

$$\text{اس لئے جز ہیں } \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \text{ اور } \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

مثال 15: ایک موٹر بوٹ جب کہ ٹھہرے ہوئے پانی میں رفتار 18 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔ 24 کلومیٹر کا فاصلہ ایک ہی مقام تک بہاؤ کے خلاف پہنچنے میں 1 گھنٹہ زیادہ لیتی ہے نسبت بہاؤ کے ساتھ چلنے میں۔ پانی کی رفتار معلوم کیجیے۔
حل: مان لیجئے پانی کی رفتار x کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

اس لئے بوٹ کی بہاؤ کے خلاف رفتار ہے $(18+x)$ = کلومیٹر فی گھنٹہ اور بہاؤ کے ساتھ بوٹ کی رفتار $(18-x)$ کلومیٹر فی گھنٹہ

$$\text{بہاؤ کے خلاف جانے میں لیا گیا وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}} = \frac{24}{18-x} \text{ گھنٹے}$$

$$\text{اسی طرح سے بہاؤ کے ساتھ جانے میں لیا گیا وقت} = \frac{24}{18+x} \text{ گھنٹے}$$

سوال کے مطابق

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$$24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x) \quad \text{یعنی}$$

$$x^2 + 48x - 324 = 0 \quad \text{یعنی}$$

دو درجی فارمولہ کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2} \\ = \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ یا } -54$$

کیونکہ x پانی کی رفتار ہے اس لئے یہ منفی نہیں ہو سکتی اس لئے ہم $x = -54$ کو نظر انداز کر دیتے ہیں، اس لئے $x = 6$ ہمیں پانی کی رفتار ملتی ہے جو 6 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

مشق 4.3

1- مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کے جزر معلوم کیجیے، مربع مکمل کرنے کے طریقہ سے، اگر موجود ہوں۔

$$2x^2 + x - 4 = 0 \quad \text{(ii)}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad \text{(i)}$$

$$2x^2 + x + 4 = 0 \quad \text{(iv)}$$

$$4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0 \quad \text{(iii)}$$

2- سوال 1 میں دی گئی دو درجی مساوات کے جزر دو درجی فارمولہ سے کیجیے۔

3۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے جز معلوم کیجیے۔

$$x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0 \quad (i) \quad \text{ii) } x \neq -4, 7, \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$$

4۔ رحمان کی 3 سال پہلے کی عمر اور 5 سال بعد کی عمر کے مقلوبوں کا حاصل جمع $\frac{1}{3}$ ہے اس کی موجودہ عمر معلوم کیجیے۔

5۔ ایک کلاس ٹسٹ میں شیفا کی ریاضی اور انگلش میں حاصل کردہ نمبروں کا حاصل جمع 30 ہے۔ اگر اس کے ریاضی میں 2 نمبر زیادہ ہوتے اور انگلش میں 3 نمبر کم ہوتے تو اس کے نمبروں کا حاصل ضرب 210 ہوتا۔ مضمون میں اس کے نمبر معلوم کیجیے۔

6۔ ایک مستطیل نما میدان کا وتر اس کے چھوٹے ضلع سے 60 میٹر زیادہ ہے۔ اگر اس کا بڑا ضلع چھوٹے ضلع سے 30 میٹر زیادہ ہے تو میدان کے اضلاع معلوم کیجیے۔

7۔ دو اعداد کے مربعوں کا حاصل فرق 180 ہے۔ چھوٹے عدد کا مربع بڑے عدد کا 8 گنا ہے۔ دو نمبر معلوم کیجیے۔

8۔ ایک ٹرین 360 کلومیٹر یکساں رفتار سے چلتی ہے۔ اگر اس کی رفتار 5 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہوتی تو وہ یہی سفر 1 گھنٹہ میں کم میں طے کرتی۔ ٹرین کی رفتار معلوم کیجیے۔

9۔ پانی کے دو ٹن ایک ٹینک کو $9\frac{3}{8}$ گھنٹے میں بھرتے ہیں۔ بڑے قطر والا ٹن اسی ٹینک کو اکیلے بھرنے میں چھوٹے قطر

والے ٹن سے 10 گھنٹہ کم لیتا ہے۔ وہ وقت معلوم کیجیے، جس میں دونوں ٹن علیحدہ علیحدہ اسی ٹینک کو بھریں گے۔

10۔ میسور سے بنگلور تک کا 132 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں ایک ایکسپریس ٹرین سواری گاڑی سے 1 گھنٹہ کم لیتی ہے۔

(درمیان میں آنے والے اسٹیشنوں پر رکنے کے وقت نظر انداز کرتے ہوئے) اگر ایکسپریس ٹرین کی اوسط رفتار سواری

گاڑی کی اوسط رفتار سے 11 کلومیٹر فی گھنٹہ زیادہ ہے۔ تو دونوں ٹرینوں کی اوسط رفتار معلوم کیجیے۔

11۔ دو مربعوں کے رقبہ کا حاصل جمع $468m^2$ ۔ اگر ان کے احاطوں کا 24 میٹر ہے تو دونوں مربعوں کے اضلاع معلوم کیجیے۔

4.5 جڑوں کی قسم

پچھلے سیکشن میں آپ نے دیکھا کہ دورجی مساوات کے جز ہیں۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اگر $b^2 - 4ac > 0$ تو ہمیں دو مختلف حقیقی جڑیں مل سکتے ہیں $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

اگر $b^2 - 4ac = 0$ تب $x = -\frac{b}{2a} \neq 0$ یعنی $x = -\frac{b}{2a}$ یا $x = \frac{-b}{2a}$

اس لئے دونوں $ax^2 + bx + c = 0$ اس مساوات کے جڑ ہیں

اس لئے ہم کہتے ہیں کہ وہ درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے دو مساوی حقیقی جڑ ہوتے ہیں۔

اگر $b^2 - 4ac \leq 0$ ہے تب کوئی ایسا حقیقی عدد نہیں ہے جس کا مربع $b^2 - 4ac$ ہو۔

($b^2 - 4ac$) وضاحت کرتا ہے کہ دی گئی دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے حقیقی جڑ ہوتے ہیں یا نہیں،

اس لیے $b^2 - 4ac$ کو اس دو درجی مساوات کا میٹر (discriminant) کہتے ہیں۔

کیونکہ $b^2 - 4ac$ کی قدر طے کرتی ہے کہ دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جڑ حقیقی ہیں یا نہیں،

$b^2 - 4ac$ دو درجی مساوات کی میٹر (Discriminant) کہتے ہیں۔

اس لئے دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جڑ

(i) مختلف اور حقیقی ہوں گے اگر $b^2 - 4ac > 0$

(ii) حقیقی اور مساوی ہوں گے اگر $b^2 - 4ac = 0$

(iii) حقیقی نہیں ہوں گے اگر $b^2 - 4ac < 0$

آئیے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 16: دو درجی مساوات $2x^2 - 4x + 3 = 0$ کا میٹر معلوم کیجئے اور پھر اس کے جڑوں کو استعمال معلوم کیجئے۔

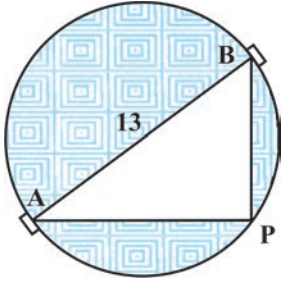
حل: دی ہوئی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی ہے جہاں $a = 2, b = -4, c = 3$ اس لئے میٹر ہے

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے حقیقی جڑ نہیں ہیں۔

مثال 17: 13 میٹر قطر والے ایک دائری پارک کی باؤنڈری کے ایک نقطہ پر ایک کھمبا اس طرح کھڑا کیا جاتا ہے کہ اس کے

قطر کے سرے کے نقطوں A اور B پر موجود دو دروازوں سے اس کے فاصلہ کا فرق 7 میٹر ہے۔ کیا ایسا کرنا ممکن ہے؟ اگر ہاں تو



شکل 4.4

معلوم کیجئے کہ 2 دروازوں سے کتنے فاصلہ پر کھمبا کھڑا کیا جائے گا۔

حل: آئیے پہلے ڈائی گرام بنائیے (شکل 4.4 دیکھئے)

مان لیجئے P، کھمبا کا مطلوبہ مقام ہے، مان لیجئے کھمبا کا دروازہ B سے فاصلہ x میٹر ہے یعنی BP = x میٹر۔ اب دونوں دروازوں کے کھمبا سے فاصلوں کا فرق $AP - BP = 7$ میٹر

(یا $BP - AP = 7$) اس لئے $AP = (x + 7)$ میٹر

اب $AB = 13$ میٹر اور کیونکہ AB وتر ہے

(کیوں؟)

$$\angle APB = 90^\circ$$

(فیثاغورث کا مسئلہ)

$$AP^2 + PB^2 = AB^2$$

اس لئے

$$(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$$

یعنی

$$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$$

یعنی

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

یعنی

اس لئے دروازہ B سے کھمبا کا فاصلہ x مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$x^2 + 7x - 60 = 0$$

اس لئے اگر اس مساوات کے جز حقیقی ہوئے تو ایسا ممکن ہے کہ کھمبا اس مقام پر لگایا جاسکے۔ یہ دیکھنے کے لئے کہ ایسا

ہے آئیے اس کی میٹیز (Discriminant) پر غور کیجئے۔ میٹیز ہے۔

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

اس لئے دی ہوئی دو درجی مساوات کے دو حقیقی جز ہیں۔ اس لئے پارک کی باؤنڈری پر کھمبا کھڑا کیا جاسکتا ہے۔

دو درجی مساوات $x^2 + 7x - 60 = 0$ کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے۔

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

اس لئے $x = 5$ یا $x = -12$

کیونکہ x دروازہ B اور کھبے کے درمیان فاصلہ ہے۔ اس لئے یہ مثبت ہوگا۔ اس لئے $x = -12$ کو نظر انداز کرنا ہوگا۔ اس لئے $x = 5$

اس لئے کھمبا پارک کی باؤنڈری پر دروازہ B سے 5 میٹر کے فاصلہ پر اور دروازہ A سے 12 میٹر کے فاصلہ پر ہوگا۔

مثال 18: مساوات $3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ کا میز معلوم کیجئے اور پھر جڑوں کی استعمال معلوم کیجئے۔ ان کو معلوم کیجئے اگر حقیقی ہیں۔

حل: یہاں $a = 3$, $b = -2$, اور $c = \frac{1}{3}$

اس لئے میز $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

اس طرح دی ہوئی دو درجی مساوات کے دو مساوی حقیقی جڑ ہیں۔

جڑ ہیں $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ یعنی $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{6}$ یعنی $\frac{-b}{2a}$, $\frac{-b}{2a}$

مشق 4.4

1- مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے جڑوں کی nature معلوم کیجئے۔ اگر جڑ موجود ہیں تو ان کو معلوم کیجئے۔

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

(ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2- k کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لئے مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے مساوی جڑ ہیں۔

(i) $2x^2 - kx + 3 = 0$

(ii) $kx(x-2) + 6 = 0$

3- کیا یہ ممکن ہے کہ ایسا آموں کا باغ ڈیزائن کیا جائے جس کی لمبائی اس کی چوڑائی کی دگنی ہے اور اس کا رقبہ $800m^2$ ہو؟ اگر ایسا ممکن ہے تو اس کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجئے۔

4- کیا مندرجہ ذیل صورت حال ممکن ہے۔ اگر ہے تو ان کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

دو دوستوں کی عمروں کا حاصل جمع 20 سال ہے۔ چار سال پہلے ان کی عمروں کا حاصل ضرب (سالوں میں) 48 تھا۔

5- کیا ایک ایسا مستطیل پارک کا ڈیزائن کرنا ممکن ہے جس کا احاطہ 80 میٹر ہو اور رقبہ 400 مکعب میٹر؟ اگر ہے تو اس کی لمبائی و چوڑائی معلوم کیجئے۔

4.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1- متغیر x میں دورجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل کی ہوتی ہے جہاں a, b, c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ۔

2- ایک حقیقی عدد α دورجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا جزر کہلاتا ہے اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ دورجی

کثیررکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اور دورجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر مساوی ہوتے ہیں۔

3- اگر ہم دورجی کثیررکنی $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کو دو خطی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیں تو دو

درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ہر ایک خطی جزو ضربی کو صفر کے برابر رکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔

4- دورجی مساوات کو مربع مکمل کر کے طریقہ سے بھی حل کیا جاسکتا ہے۔

5- دورجی فارمولہ: دورجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے جزر ہیں

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ہے جب کہ $b^2 + 4ac \geq 0$

6- ایک دورجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے

(i) دو مختلف اور حقیقی جزر ہوں گے اگر $b^2 + 4ac > 0$

(ii) مساوی جزر ہوں گے اگر $b^2 - 4ac = 0$

(iii) حقیقی جزر نہیں ہوں گے اگر $b^2 - 4ac < 0$

قارئین کے لئے نوٹ

عبارتی سوال کے سلسلہ میں موصول حل کو ہمیشہ اصل مساوات کی شرطوں میں رکھ کر تصدیق کرنی چاہیے نہ

کہ بعد میں بنی مساواتوں کے (مثالیں 11, 13, 19 جو باب 3 کی ہیں اور باب 4 کی مثالوں 10, 11

اور 12 کو دیکھیے)۔