

ٹرگنومیٹرک تفاعلات (TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

❖ ایک ریاضی دان جانتا ہے کہ مسئلہ کا حل کس طرح
کیا جاتا ہے، وہ اسے کرنہیں سکتا۔ "MILNE"

3.1 تعارف (Introduction)



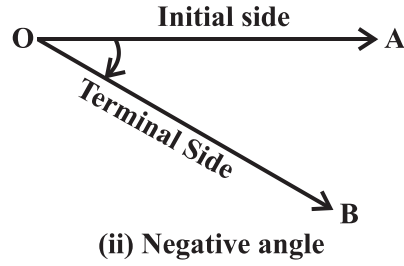
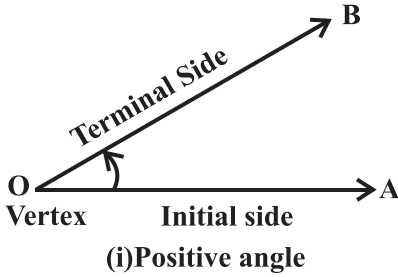
آریہ بھٹ
(476-550)

لفظ ٹرگنومیٹری۔ گریک الفاظ "trigon" اور "metron" سے لیا گیا ہے اور اس کا مطلب ہے مثلث کے اضلاع کی پیمائش کرنا ابتدا میں مضمون مثلثوں کے جیومیٹرک مسئلہ کو حل کرنے کے لیے بنایا گیا تھا۔ اس کا مطالعہ جہاز رانی کے سمندری کے کپتانوں، نئی زمینوں کے نقشے بنانے والے سرویزر surveyor اور انجینیرز میں engineers وغیرہ کر چکے تھے۔ آجکل ٹرگنومیٹری کا استعمال بہت سے حلقوں میں کیا جاتا ہے جیسے زلزلہ کی وجوہات جاننے، برقی سرکٹ کے ڈیزائن بنانے، ایٹم کی حالت کو بتانے، سمندر میں لہروں کی اونچائی کی پیش گوئی کرنے، موسیقی کی دھن کو الگ الگ بتانے اور بہت سی دوسری جگہ کیا جاتا ہے۔

ہم پچھلی جماعتوں میں پہلے ہی زاویہ حادہ کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں بحیثیت قائم زادی مثلث (right angled triangle) کے ضلعوں کے بیچ نسبت کی حیثیت سے پڑھ چکے ہیں، ہم پہلے ہی ٹرگنومیٹرک اکائی اور ان کا استعمال ان مسئلوں کے حل کے لیے کر چکے ہیں جن میں اونچائی اور فاصلہ پر مبنی سوالات ہوں۔ اس سبق میں ہم ٹرگنومیٹرک نسبتوں کے مفہوم کو عام کر کے ٹرگنومیٹرک تفاعلات اور اس کی خصوصیات کا مطالعہ کریں گے۔

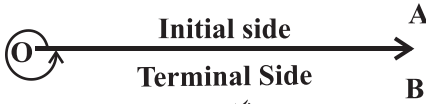
3.2 زاویے (Angles)

کسی شعاع (Ray) کی نقطہ آغاز کے گرد گھومنے کی مقدار زاویہ (Angle) کہلاتی ہے۔ اصلی شعاع زاویہ کا ابتدائی ضلع (Initial arm)



شکل 3.1

اور گھومنے کے بعد کی حالت میں وہ شعاع زاویہ کا اختتامی ضلع کہلاتا ہے جس نقطہ کے گرد گھماؤ ہوا ہے اسے نقطہ راس (Vertex) کہتے ہیں۔ اگر گھومنے کی سمت anti-clock wise ہو تو زاویہ مثبت زاویہ کہلاتا ہے اور اگر گھومنے کی سمت clock wise ہو تو زاویہ منفی ہوگا۔



شکل 3.2

زاویہ کی پیمائش (ناپ) وہ ہے جو ابتدائی ضلع سے اختتامی ضلع تک گھومنے سے حاصل ہوتا ہے زاویوں کو ناپنے کے بہت سے پیمانے ہیں۔ زاویہ کی تعریف ایک اکائی بتاتی ہے۔ جس کا مطلب ہے ابتدائی ضلع کی جگہ سے ایک مکمل چکر جیسا کہ شکل 3.2 میں دکھایا گیا۔

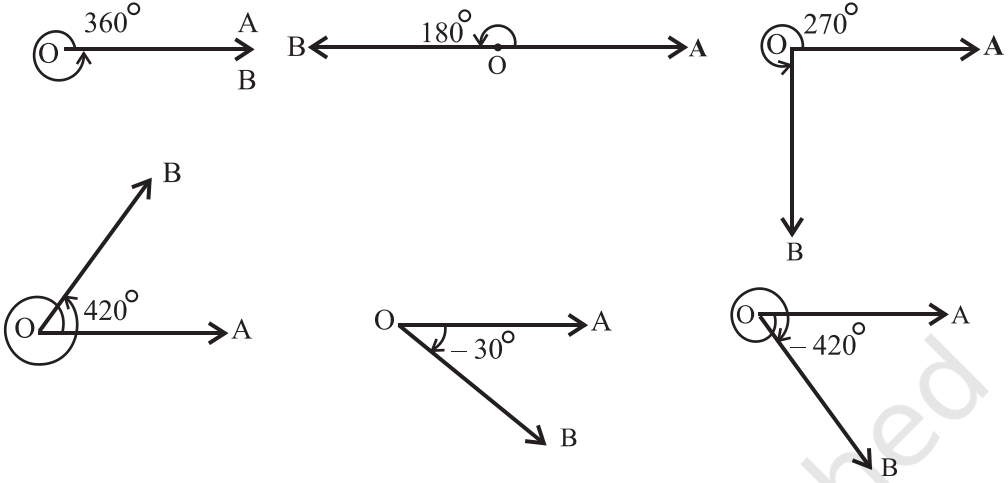
عام طور پر یہ بڑے زاویوں کے لیے (موزوں) ہے۔ مثال کے طور پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک پہیہ تیزی سے گھومتا ہوا 15 چکر فی سیکنڈ کے حساب سے ایک زاویہ بنا رہا ہے۔ ہمیں زاویہ کی پیمائش کی دو اور اکائیاں بتانی ہیں جو سب سے زیادہ استعمال ہوتی ہیں مطلب ہے درجہ پیمائش (Degree measure) اور ریڈین پیمائش (radian measure)۔

3.2.1 درجہ پیمائش (Degree measure) اگر گھماؤ یا گردش ابتدائی ضلع سے اختتامی ضلع تک $\left(\frac{1}{360}\right)^{th}$ چکر ہے تو زاویہ کی پیمائش 1 درجہ ہے جو 1° لکھا جاتا ہے۔ ایک درجہ منٹوں میں بانٹا جاتا ہے اور ایک منٹ سیکنڈوں میں بانٹا جاتا ہے۔ درجہ کا ایک ساٹھواں حصہ منٹ کہلاتا ہے جسے $1'$ لکھا جاتا ہے اور ایک منٹ کا ایک ساٹھواں حصہ ایک سیکنڈ کہلاتا ہے اور $1''$ لکھا جاتا ہے۔

$$1^\circ = 60', \quad 1' = 60'', \quad \text{اس لئے}$$

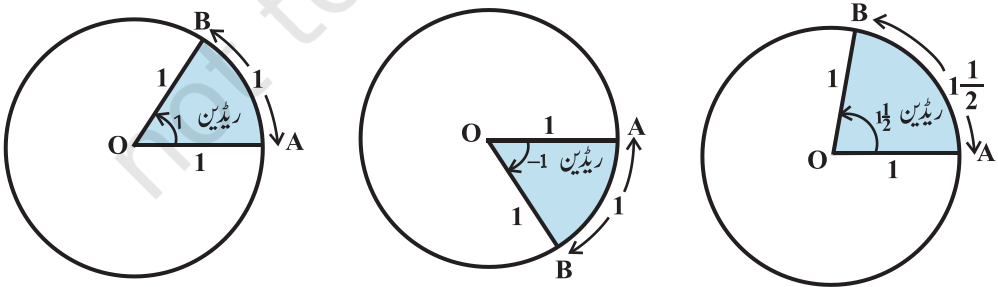
کچھ زاویے جن کی ناپ (ناپ) 360° ، 180° ، 270° ، 420° ، -30° ، -420° شکل 3.3 میں

دکھائے گئے ہیں۔

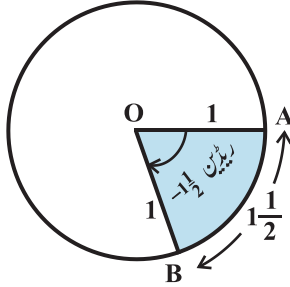


شکل 3.3

3.2.2 ریڈین پیمائش (Radian measure) زاویہ کی پیمائش کی ایک دوسری اکائی ریڈین پیمائش ہے۔ ایک اکائی کی لمبائی والے قوس سے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے جسکو ایک اکائی دائرہ (وہ دائرہ جسکا نصف قطر 1 اکائی ہے) کہتے ہیں جسکی پیمائش 1 ریڈین ہے۔ شکل میں 3.4(i) OA ابتدائی ضلع ہے اور OB اختتامی ضلع ہے یہ شکلیں وہ زاویہ دکھائی ہیں جنکی پیمائش (ناپ) ریڈین، 1 ریڈین، -1 ریڈین، $1\frac{1}{2}$ ریڈین اور $-1\frac{1}{2}$ ریڈین ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ 1 اکائی نصف قطر والے دائرہ کا محیط 2π ہے۔ اسلئے ابتدائی ضلع کا ایک مکمل چکر 2π ریڈین کا زاویہ بناتا ہے۔



شکل 3.4 (i) سے (iii)

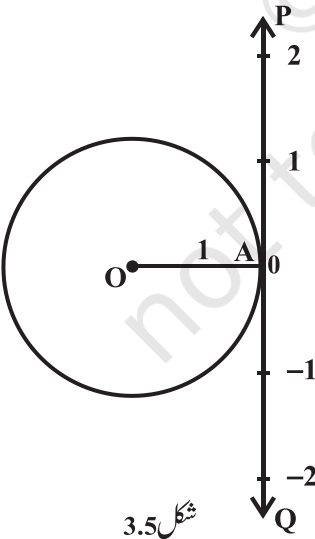


شکل 3.4 (iv)

اور زیادہ عام طور پر r نصف قطر والے دائرہ میں، r لمبائی والا قوس 1 ریڈین کا زاویہ بناتا ہے۔ یہ بخوبی جانا جاتا ہے کہ دائرہ کے برابر قوس مرکز پر برابر کے زاویہ بناتے ہیں۔ کیونکہ r نصف قطر والے دائرہ میں، ایک قوس جسکی لمبائی r ہے ایک زاویہ بناتی ہے جسکی پیمائش 1 ریڈین ہے، اس لیے ایک قوس جسکی لمبائی l ہے ایک زاویہ بنائے گا جسکی پیمائش $\frac{l}{r}$ ریڈین ہے۔ اس لیے اگر ایک r نصف قطر والے دائرہ میں، ایک قوس جسکی لمبائی l ہے مرکز پر ایک زاویہ θ بناتا ہے تو ہمارے پاس ہے۔

$$l = r\theta \text{ یا } \theta = \frac{l}{r}$$

3.2.3 ریڈین اور حقیقی اعداد کے بیچ میں رشتہ (تعلق) (Relation between radian and)



(**real numbers**) ایک اکائی دائرہ کا تصور کیجئے جسکا مرکز 0 ہے۔ مان لیجئے 2، 1، 0، -1، -2 کو زاویہ کا ابتدائی ضلع مان لیجئے۔ تب دائرہ کے ایک قوس کی لمبائی زاویہ کی ریڈین ماپ دے گا جو قوس دائرہ کے مرکز پر بناتا ہے۔ خط PAQ کا تصور کیجئے جو دائرہ میں نقطہ A پر مماس ہے مان لیجئے نقطہ A حقیقی عدد صفر کو دکھاتا ہے۔ مثبت حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے اور AQ منفی حقیقی اعداد کا ظاہر کرتا ہے (شکل 3.5) اگر ہم خط AP کو دائرہ کی anti-clock wise سمت میں گھمائیں اور خط AQ کو clock wise سمت میں گھمائیں تو ہر حقیقی عدد ایک ریڈین پیمانہ کے مطابق ہوگا اور اسے برعکس۔ اسلئے ریڈین پیمائش اور حقیقی اعداد کو ایک سمجھا جاسکتا ہے۔

شکل 3.5

3.2.4 درجہ اور ریڈین کے درمیان تعلق (رشتہ) (Relation between degree and radian)

(**radian**) کیونکہ دائرہ مرکز پر ایک زاویہ بناتا ہے جسکی ریڈین پیمائش 2π ہے اور اس کی درجہ پیمائش 360° ہے۔ اس سے یہ ملتا ہے۔

$$2\pi \text{ radian} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ radian} = 180^\circ$$

اوپر دیا ہوا رشتہ ہمیں ریڈین پیمائش کو درجہ پیمائش میں ظاہر کرنے میں مدد کرتا ہے اور درجہ پیمائش کو ریڈین پیمائش میں π کی تقریباً قدر $\frac{22}{7}$ استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 16'$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radian} = 0.01746 \text{ radian}$$

کچھ زاویوں کا درجہ پیمائش اور ریڈین پیمائش کے بیچ رشتہ مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔

Degree	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

خیالی معاہدہ (سمجھوتہ) National convention

کیونکہ زاویے درجہ بار ریڈین میں ناپے جاتے ہیں، ہم خیالی معاہدہ کو اپناتے ہیں کہ جب بھی ہم زاویہ θ° لکھیں۔ ہمارا مطلب ہے وہ زاویہ جسکی پیمائش θ ہے اور جب کبھی ہم زاویہ β لکھیں، ہمارا مطلب ہو وہ زاویہ جسکی ریڈین پیمائش β ہے۔ یہ بات نوٹ کر لیجئے جب کوئی زاویہ ریڈین میں ظاہر کیا جائے۔ لفظ ریڈین کو زیادہ تر ہٹا دیں۔ اس لیے $\pi = 180^\circ$ اور

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ اس سمجھ کے ساتھ لکھے گئے ہیں کہ } \pi \text{ اور } \frac{\pi}{4} \text{ ریڈین پیمائش میں۔ اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ}$$

$$\text{ریڈین پیمائش} = \frac{\pi}{180} \times \text{درجہ پیمائش}$$

$$\text{درجہ پیمائش} = \frac{180}{\pi} \times \text{ریڈین پیمائش}$$

مثال 1 $40^\circ 20'$ کو ریڈین پیمائش میں بدلنے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ $\pi = 180^\circ$ ریڈین

$$\text{یہاں } 40^\circ 20' = 40\frac{1}{3}^\circ, \text{ درجات } = \frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3} = \frac{121\pi}{540} \text{ ریڈین}$$

$$\text{اس لیے } 40^\circ 20' = \frac{121\pi}{540} \text{ ریڈین}$$

مثال 2 6 ریڈین کو درجہ پیمائش میں بدلئے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ π ریڈین 180°

$$\text{اس لیے 6 ریڈین } = 6 \times \frac{180}{\pi} = \frac{1080 \times 7}{22} \text{ درجہ}$$

$$= \frac{7 \times 60}{11} = 343 \frac{7}{11} \text{ درجہ } (1^\circ = 60' \text{ کیونکہ})$$

$$= 343^\circ + 38' + \frac{2}{11} = (1^\circ = 60'' \text{ کیونکہ})$$

$$= 343^\circ + 38' + 10.9'' = 343^\circ 38' 11'' \text{ تقریباً}$$

$$\text{اس لیے 6 ریڈین } = 343^\circ 38' 11'' \text{ (تقریباً)}$$

مثال 3 دائرہ کا نصف قطر معلوم کیجئے جس میں 60° کا مرکزی زاویہ ایک قوس کو کاٹتا ہے جس کی لمبائی 37.4 سم ہے

$$\left(\pi \frac{22}{7} \text{ کا استعمال کریں} \right)$$

$$\text{حل یہاں } l = 37.4 \text{ اور } \theta = 60^\circ = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ ریڈین ہے۔}$$

$$\text{اس طرح } r = \frac{l}{\theta} \text{ کا استعمال کر کے ہمارے پاس ہے۔}$$

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ سم}$$

مثال 4 ایک گھڑی کی منٹ والی سوئی کی لمبائی 1.5 سم ہے۔ یہ 40 منٹ میں کتنا آگے بڑھے گی؟ $\pi = 3.14$ کا

استعمال کیجئے۔

حل 60 منٹ میں، منٹ والی سوئی گھڑی کا ایک چکر لگائی ہے۔ اس لیے 40 منٹ میں منٹ والی سوئی $\frac{2}{3}$ چکر لگائے گی۔

اس لیے $0 = \frac{2}{3} \times 360^\circ$ یا $\frac{4\pi}{3}$ ریڈین یہاں طے کیا گیا۔

$$\text{فاصلہ } l = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} = 2\pi = 2 \times 3.14 = 6.28 \text{ سم}$$

مثال 5 اگر دو برابر لمبائی والے قوس دائروں کے مرکز پر بالترتیب 65° اور 110° کے زاویہ بناتے ہیں تو انکے نصف قطروں کی نسبت معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے r_1 اور r_2 دو دائروں کے نصف قطر ہیں۔ دیا ہوا ہے

$$\theta_1 = 65^\circ = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36} \text{ ریڈین}$$

$$\theta_2 = 110^\circ = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36} \text{ اور ریڈین}$$

مان لیجئے ہر قوس کی لمبائی l ہے، تب $r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ جو دیتا ہے

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ i.e., } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

$$r_1 : r_2 = 22 : 13 \text{ اس لیے}$$

مشق 13.1

1. ذیل میں دی گئی درجہ پیمائش کے مطابق ریڈین پیمائش معلوم کیجئے۔
 25° (i) $-47^\circ 30'$ (ii) 240° (iii) 520° (iv)
2. ذیل میں دی گئی ریڈین پیمائش کے مطابق درجہ پیمائش معلوم کیجئے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ کا استعمال کیجئے)
 $\frac{11}{16}$ (i) -4 (ii) $\frac{5\pi}{3}$ (iii) $\frac{7\pi}{6}$ (iv)
3. ایک پہیہ ایک منٹ میں 360 چکر لگاتا ہے۔ ایک سیکنڈ میں یہ کتنے ریڈین گھومتا ہے؟
4. ایک قوس جسکی لمبائی 22 سم ہے ایک دائرہ کے مرکزی پرچس کا نصف قطر 100 سم ہے زاویہ بناتا ہے اسکی درجہ پیمائش معلوم کیجئے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ کا استعمال کیجئے)
5. ایک 40 سم قطر والے دائرہ میں وتر کی لمبائی 20 سم ہے۔ وتر کے چھوٹے قوس کی لمبائی معلوم کیجئے؟

6. اگر دو دائروں میں برابر لمبائی والے قوس مرکز پر 60° اور 75° کے زاویہ بناتے ہیں تو ان کے نصف قطر کی نسبت معلوم کیجئے۔

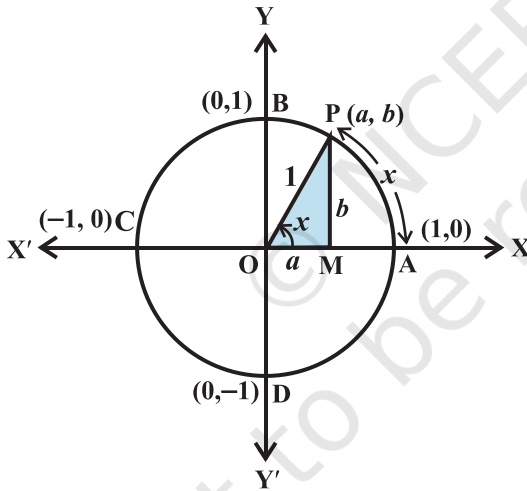
7. ایک 75 سم لمبا پنڈولم (لنگر) جھول رہا ہے۔ اس کا سرازیل لمبائی والے قوس بناتا ہے۔

(i) 10 سم (ii) 15 سم (iii) 21 سم

ریڈین میں ان زاویوں کی پیمائش معلوم کیجئے؟

3.3 ٹرگنومیٹرک تفاعلات (Trigonometric Functions)

کچھلی جماعتوں میں حادہ زاویوں کی ٹرگنومیٹرک نسبتیں قائمی زاوی مثلث (Right angle triangle) کے اضلاع کی نسبتوں کی حیثیت سے پڑھ چکے ہیں اب ہم ٹرگنومیٹرک نسبت کی تعریف کو کسی بھی زاویے کی ریڈین پیمائش تک بڑھا کر ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی حیثیت سے مطالعہ کریں گے۔



شکل 3.6

مختص محاور (Co-ordinate axes) پر ایک اکائی دائرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو لیجئے۔ مان لیجئے $P(a, b)$ دائرہ پر کوئی نقطہ ہے جس میں زاویہ $\angle AOP = x$ ریڈین i.e. قوس AP کی لمبائی x (شکل 3.6)

ہم بیان کرتے ہیں $\cos x = a$ اور

$\sin x = b$ کیونکہ $\triangle OMP$ ایک قائم

مثلث ہے ہمارے پاس ہے۔

$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

$$a^2 + b^2 = 1 \text{ یا}$$

اس لیے اکائی دائرہ پر ہر نقطے کے لیے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ یا}$$

کیونکہ ایک پورا چکر مرکز پر 2π ریڈین کا زاویہ بناتا ہے، $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ، $\angle AOC = \pi$ ، $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$ ، وہ

زاویے جو $\frac{\pi}{2}$ کے مضروب (Multiples) میں ربعی زاویے (Quadrantal angles) کہلاتے ہیں۔ نقاط A، B، C اور

D کے مختص بالترتیب (1,0)، (0,1)، (-1,0) اور (0,-1) ہیں۔ اس لیے

$$\cos 0^\circ = 1 \quad \sin 0^\circ = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = -1 \quad \sin \pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1 \quad \sin 2\pi = 0$$

اگر اب ہم نقطہ P سے ایک مکمل چکر لیں ہم دوبارہ پھر اسی نقطہ P پر آجائیں گے۔ اس لیے اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر x بڑھتا ہے (یا گھٹتا ہے) 2π کے تکملہ ضرب سے تو sine اور cosine تفاعل کی قدر نہیں بدلتی۔ اس لیے

$$\cos(2n\pi + x) = \cos x, n \in \mathbb{Z}, \sin(2n\pi + x) = \sin x, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0, \text{ if } x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots \text{i.e., آگے}$$

جب x ایک π کا تکملہ ضرب ہو۔

$$\cos x = 0, \text{ if } x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots \text{i.e., اور}$$

اس کا مطلب $\cos x$ ختم ہو جاتا ہے جبکہ $x, \frac{\pi}{2}$ کا طاق ضرب ہو۔ اس لیے

$$\sin x = 0 \text{ implies } x = n\pi, \text{ } n \text{ is any integer}$$

$$\cos x = 0 \text{ implies } x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ } n \text{ is any integer}$$

اب ہم دوسرے ٹرگنومیٹری تفاعل sine اور cosine تفاعل کی شکل میں بیان کریں گے۔
(n ایک صحیح عدد ہے)

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, x \neq n\pi, \text{ } n \text{ is integer}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ } n \text{ is integer}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \text{ is integer}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq n\pi, n \text{ is integer}$$

ہم تمام حقیقی x کے لیے یہ دکھا چکے ہیں

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

اس سے یہ ملتا ہے۔

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \text{ (کیوں؟)}$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \text{ (کیوں؟)}$$

ہم اپنی پچھلی جماعتوں میں ٹرگنومیٹری نسبت کی قدریں $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ اور 90° کے بارے میں بحث و مباحثہ کر چکے ہیں۔ ٹرگنومیٹری تفاعل کی قدریں ان زاویوں کے لیے وہی ہیں جو ٹرگنومیٹری نسبت کی پچھلی جماعتوں میں پڑھی ہیں۔ اس لیے ہمارے پاس مندرجہ ذیل جدول ہے:

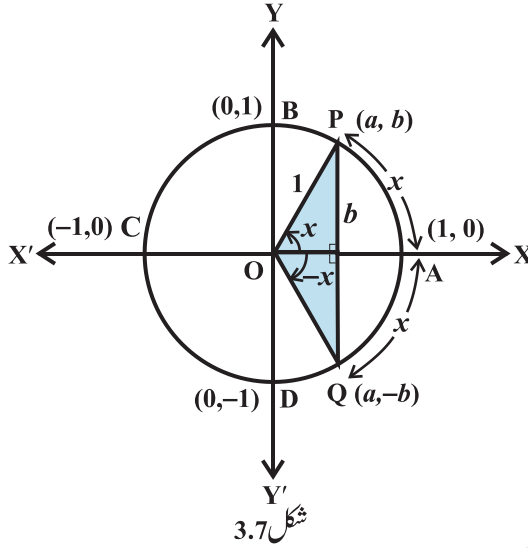
	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	not defined	0	not defined	0

$\sec x, \operatorname{cosec} x$ اور $\cot x$ کی قدریں $\sin x, \cos x$ اور $\tan x$ کے بالترتیب مقلوب ہیں۔

3.3.1 ٹرگنومیٹرک تفاعل کے نشانات (Signs of trigonometric functions) مان لیجئے

$P(a, b)$ اکائی دائرہ پر جس کا مرکز مبدا پر ہے کوئی نقطہ ہے تاکہ $\angle AOP = x$ اگر $\angle AOQ = -x$ ہو تو نقطہ Q کے

مختص $(a, -b)$ ہوں گے (شکل 3.7)۔ اس لیے



شکل 3.7

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

کیونکہ کسی بھی اکائی دائرہ پر نقطہ P(a,b) کے لیے
 $-1 \leq a \leq 1$ اور $-1 \leq b \leq 1$ ہمارے پاس ہے
 اور $-1 \leq \sin x \leq 1$ تمام x کے لئے۔ ہم اپنی پچھلی
 جماعتوں سے جانتے ہیں کہ پہلے ربع میں
 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ اور a اور b دونوں مثبت ہیں دوسرے ربع
 $(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$ میں a منفی ہے اور b مثبت تیسرے

ربع میں $(\pi < x < 3\frac{\pi}{2})$ اور b دونوں منفی ہیں اور چوتھے ربع میں $(3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi)$ a مثبت ہے اور b منفی۔ اس
 لیے $\sin x$ کے لیے مثبت ہے اور $0 < x < \pi$ کے لیے منفی (اسی طرح) مشابہ کے طور پر
 $\cos x$ مثبت ہے اور $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے منفی اور $\frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}$ کے مثبت۔ اسی طرح
 ہم دوسرے ٹرگنومیٹرک تفاعل کے لیے نشانات نکال سکتے ہیں مختلف ربعات میں۔ حقیقت میں ہمارے پاس مندرجہ ذیل جدول
 موجود ہے:

	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-
$\operatorname{cosec} x$	+	+	-	-
$\sec x$	+	-	-	+
$\cot x$	+	-	+	-

3.2.2 ڈیٹرونمیٹرک تقاعلات کا علاقہ اور وسعت (Domain and range of trigonometri function sine)

(function sine) اور cosine تقاعلات کی تعریف سے ہم نے یہ دیکھا کہ وہ حقیقی اعداد کے لیے دکھائے گئے ہیں اسکے بعد ہم نے یہ دیکھا کہ تمام حقیقی اعداد x کے لیے،

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{اور} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

اس لیے y کا علاقہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور اسکی وسعت ایک وقفہ $[-1, 1]$ ہے۔ یعنی

$$-1 \leq y \leq 1$$

کیونکہ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ، $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ جو سیٹ ہے $\{x : x \in \mathbf{R} \text{ اور } x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$

اور وسعت ایک سیٹ ہے $(y \geq 1)$ یا $(y \leq -1)$ اسی طرح y کا علاقہ $\sec x$ جو ایک سیٹ ہے

$$\left\{x : x \in \mathbf{R} \text{ and } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\} \text{ اور وسعت ایک سیٹ ہے } (y \geq 1) \text{ یا } (y \leq -1)$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ جو کہ ایک سیٹ ہے $(y : y \in \mathbf{R}, y \leq -1)$

$$\left\{x : x \in \mathbf{R} \text{ and } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\} \text{ اور وسعت تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ } y \text{ کا علاقہ } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ جو}$$

ایک سیٹ ہے $\{x : x \in \mathbf{R} \text{ and } x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ اسکی وسعت تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔

مزید ہم یہ دیکھتے ہیں کہ پہلے ربع میں جیسے x سے $\frac{\pi}{2}$ بڑھتا ہے $\sin x$ سے 0 سے 1 بڑھ جاتا ہے، جیسے x سے $\frac{\pi}{2}$ سے π

بڑھ جاتا ہے $\sin x$ سے 1 سے 0 گھٹتا ہے۔ تیسرے ربع میں جیسے x سے $\frac{3\pi}{2}$ بڑھتا ہے تو $\sin x$ سے -1 کی طرف گھٹ

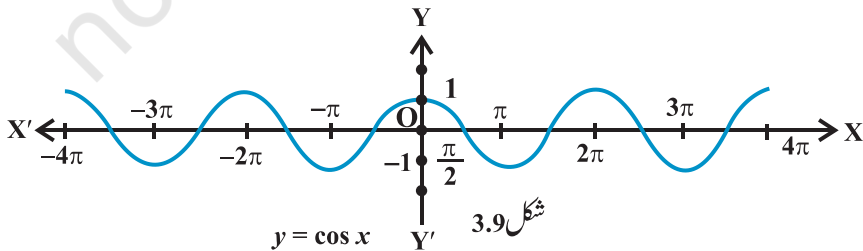
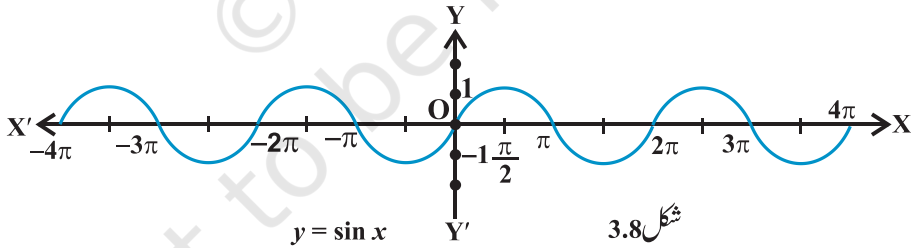
جاتا ہے۔ اور آخر میں جو تھے ربع میں $\sin x$ سے -1 سے 0 کی طرف بڑھتا ہے جبکہ x سے $\frac{3\pi}{2}$ سے 2π تک بڑھتا ہے

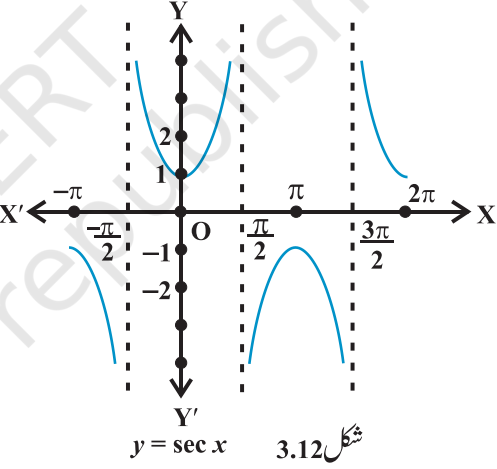
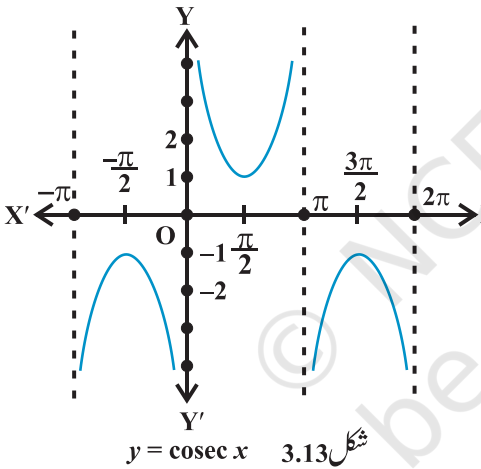
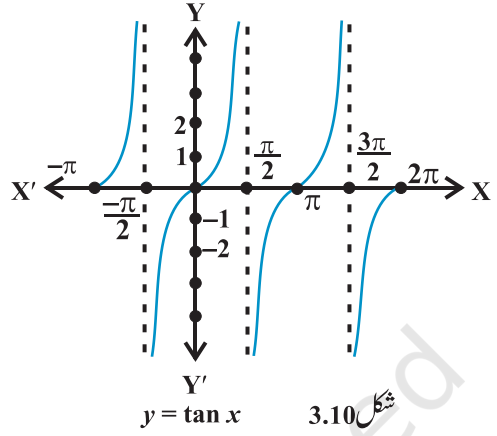
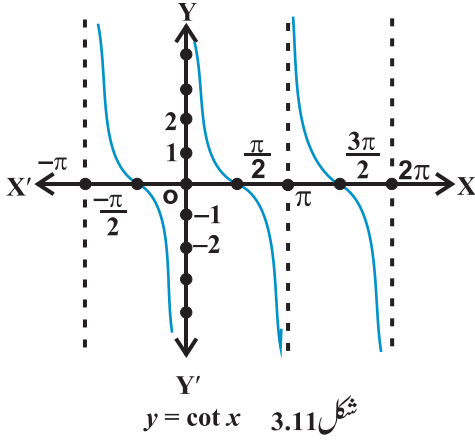
	I quadrant	II quadrant	III quadrant	IV quadrant
sin	increases from 0 to 1	decreases from 1 to 0	decreases from 0 to -1	increases from -1 to 0
cos	decreases from 1 to 0	decreases from 0 to -1	increases from -1 to 0	increases from 0 to 1
tan	increases from 0 to ∞	increases from $-\infty$ to 0	increases from 0 to ∞	increases from ∞ to 0
cot	decreases from ∞ to 0	decreases from 0 to $-\infty$	decreases from ∞ to 0	decreases from 0 to $-\infty$
sec	increases from 1 to ∞	increases from $-\infty$ to -1	decreases from -1 to ∞	decreases from ∞ to 1
cosec	decreases from ∞ to 1	increases from 1 to ∞	increases from $-\infty$ to -1	decreases from -1 to $-\infty$

اسی طرح ہم دوسرے ٹرگنومیٹرک تعلقات کے رویہ کے بارے میں بحث و مباحثہ کر سکتے ہیں۔ درحقیقت ہمارے پاس مندرجہ ذیل جدول موجود ہے۔

ریمارک اوپر دیئے ہوئے جدول میں، اس طرح کا بیان کہ $\tan x$ سے 0 (in finity) کی طرف بڑھتا ہے، $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے اس کا آسان مطلب یہ ہے کہ $\tan x$ بڑھتا ہے جبکہ x بڑھتا ہے $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے اور بڑی مثبت اختیاری قدرون کو مانئے جبکہ $x, \frac{\pi}{2}$ کی طرف بڑھتا ہے۔ اسی طرح یہ کہنا کہ $\cos x$ سے $-\infty$ (minus unfinty) کی طرف گھٹتا ہے چوتھے ربع میں کا مطلب ہے $\cos x \in (3\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ کے لیے گھٹتا ہے۔ علامتیں ∞ اور $-\infty$ سادہ پر کچھ تعلقات اور تغیر کے رویہ کو خاص طور پر بتاتے ہیں۔

ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ $\sin x$ اور $\cos x$ کی قدریں 2π وقفہ کے بعد دہرائی جاتی ہے۔ اس لیے $\csc x$ اور $\sec x$ کی قدریں 2π وقفہ کے بعد بھی دہرائی جائیں گی۔ ہم اگلے سیکشن میں دیکھیں گے کہ $\tan(\pi + x) = \tan x$ اس لئے $\tan x$ کی قدریں π وقفہ کے بعد دہرائی جائیں گی کیونکہ $\cot x$ اور $\tan x$ کا مقلوب ہے اس کی قدر بھی وقفہ π کے بعد دہرائی جائے گی۔ اس جانکاری اور ٹرگنومیٹرک تعلقات کے رویہ کا استعمال کر کے ہم ان تعلقات کے گراف بنا سکتے (کھینچ سکتے) ہیں۔ ان تعلقات کے گراف نیچے دیئے گئے ہیں۔





مثال 6 اگر $\cos x = \frac{-3}{5}$ ، x تیسرے ربع میں ہے، دوسرے پانچ (5) ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل کیونکہ $\cos x = \frac{-3}{5}$ ہمارے پاس ہے $\sec x = -\frac{5}{3}$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{اب } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{یا}$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{یا}$$

$$\sin x = \pm \frac{4}{5} \quad \text{اس لیے}$$

کیونکہ x تیسرے ربع میں موجود ہے۔ $\sin x$ ایک منفی ہے۔ اس لیے

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

جو یہ بھی دیتا ہے

$$\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$$

اس کے آگے، ہمارے پاس ہے

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \text{ اور } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

مثال 7 اگر $\cot x = \frac{-5}{12}$ ، x دوسرے ربع میں واقع ہے، دوسرے پانچ ٹرگنومیٹرک تعلقات کی قسمیں معلوم کیجئے۔

حل کیونکہ $\cot x = \frac{-5}{12}$ ہمارے پاس ہے۔

$$\tan x = \frac{-12}{5}$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \text{اب}$$

$$= 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$$

$$\sec x = \pm \frac{13}{5} \quad \text{اس لیے}$$

کیونکہ x دوسرے ربع میں واقع ہے۔ اس لیے $\sec x$ منفی ہوگا۔

$$\sec x = -\frac{13}{5} \quad \text{اس لیے}$$

آگے ہمارے پاس ہے

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x = \left(\frac{-12}{5}\right) \times \left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12} \quad \text{اور}$$

مثال 8 $\sin x = \frac{31\pi}{3}$ کی قیمت (قدر) معلوم کیجئے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ $\sin x$ کی قدریں وقفہ 2π کے بعد دہرائی جاتی ہیں۔

$$\sin \frac{31\pi}{3} = \sin(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ اس لیے}$$

مثال 9 $\cos(-1710^\circ)$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ $\cos x$ کی قدر 2π یا 360 کے وقفہ کے بعد دہرائی جاتی ہیں۔

$$\begin{aligned} \cos(-1710^\circ) &= \cos(-1710^\circ + 5 \times 360^\circ) \\ &= \cos(-1710^\circ + 1800^\circ) \\ &= \cos 90^\circ = 0 \end{aligned}$$

مشق 3.2

دوسرے پانچ ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

$$1. \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ، } x \text{ تیسرے ربع میں واقع ہے۔}$$

$$2. \sin x = \frac{3}{5} \text{ ، } x \text{ دوسرے ربع میں واقع ہے۔}$$

$$3. \cot x = \frac{3}{4} \text{ ، } x \text{ تیسرے ربع میں واقع ہے۔}$$

$$4. \sec x = \frac{13}{5} \text{ ، } x \text{ چوتھے ربع میں واقع ہے۔}$$

$$5. \tan x = \frac{-5}{12} \text{ ، } x \text{ دوسرے ربع میں واقع ہے۔}$$

ذیل میں دیئے ٹرگنومیٹرک تفاعلات کی قدریں معلوم کیجئے۔

$$6. \sin 765^\circ \quad 7. \csc(-1410^\circ)$$

$$8. \tan \frac{19\pi}{3} \quad 9. \sin(-\frac{11\pi}{3})$$

$$10. \cot(-\frac{15\pi}{4})$$

3.4 دو زاویوں کے جوڑ اور فرق کے ٹرگنومیٹرک تعلقات

(Trigonometric Functions of Sum and Difference of Two Angles)

اس حصہ (سیکشن) میں ہم دو اعداد (زاویوں) کے جوڑ اور فرق اور ان سے ملتی جلتی (مبنی) عبارتوں کے لیے ٹرگنومیٹرک تعلقات کے لیے عبارتیں نکالیں گے۔ اس بابت میں بنیادی نتیجوں کو ٹرگنومیٹرک مماثلت کہا جاتا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ۔

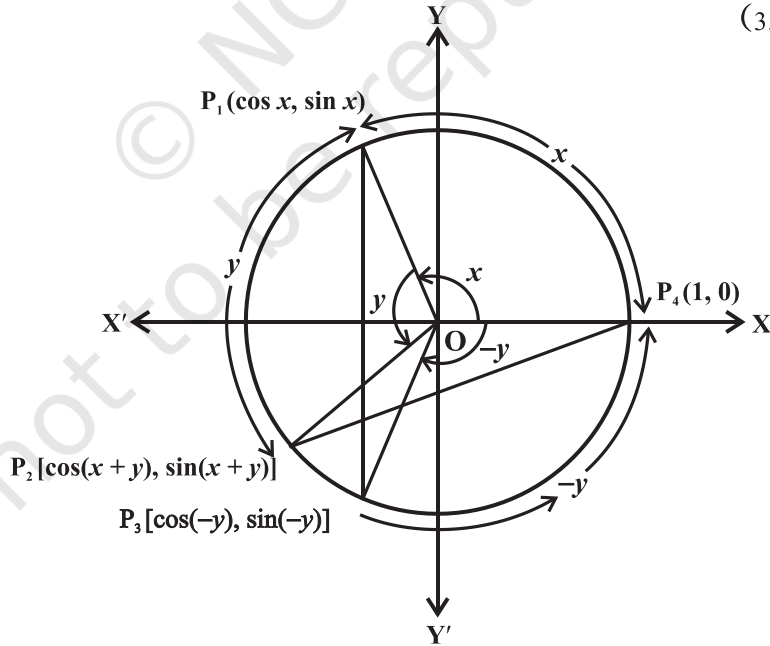
$$\sin(-x) = -\sin x \quad 1.$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad 2.$$

اب ہم کچھ اور نتائج ثابت کریں گے:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad 3.$$

ایک اکائی دائرہ لیجئے جس کا مرکز مبدأ واقع ہو۔ مان لیجئے زاویہ P_4OP_1 x ہے اور زاویہ P_1OP_2 y ہے تب $(x+y)$ زاویہ P_4OP_2 ہے ساتھ ہی مان لیجئے $(-y)$ زاویہ P_4OP_3 ہے اس لیے P_1 ، P_2 ، P_3 اور P_4 کے مختص $P_1(\cos x, \sin x)$ ، $P_2[\cos(x+y), \sin(x+y)]$ ، $P_3[\cos(-y), \sin(-y)]$ اور $P_4(1, 0)$ ہوں گے۔ (شکل 3.14)



شکل 3.14

مثلاً P_1OP_3 اور P_2OP_4 پر غور کیجئے۔ دونوں متماثل ہیں (کیوں؟)۔ اس لیے P_1P_3 اور P_2P_4 برابر ہیں۔ فاصلہ کا فارمولہ (ضابطہ) استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} P_1P_3^2 &= [\cos x - \cos(-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2 \\ &= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 \\ &= \cos^2 x + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y \end{aligned}$$

$$P_1P_3 = 2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \quad (\text{کیونکہ؟})$$

$$\begin{aligned} P_2P_4^2 &= [1 - \cos(x+y)]^2 + [0 - \sin(x+y)]^2, \text{ یہ بھی،} \\ &= 1 - 2 \cos(x+y) + \cos^2(x+y) + \sin^2(x+y) \\ &= 2 - 2 \cos(x+y) \end{aligned}$$

$$P_1P_3 = P_2P_4, \text{ we have } P_1P_3^2 = P_2P_4^2 \quad \text{کیونکہ}$$

$$2 - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2 \cos(x+y) \quad \text{اس لیے}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \text{اس لیے}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad .4$$

مماثلت 3 میں y کو $-y$ سے تبدیل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos[(x+(-y))] = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad .5$$

اگر ہم x کی جگہ $\frac{\pi}{2}$ رکھیں اور y کی جگہ x اکائی (4) میں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad .6$$

مماثلت 5 استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے۔

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos x$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad .7$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad .8 \end{aligned}$$

اگر ہم مماثلت 7 میں y کو $-y$ سے تبدیل کر دیں تو ہمیں نتیجہ مل جاتا ہے۔

.9 متماثلات 3, 4, 7 اور 8 میں x کی مناسب قدریں (قیمتیں) لینے پر ہم ذیل نتیجوں پر پہنچتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x & \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x & \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos(2\pi - x) &= \cos x & \sin(2\pi - x) &= -\sin x \end{aligned}$$

$\sin x$ اور $\cos x$ کے نتیجوں سے ہم $\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ اور $\csc x$ کے مشابہ نتائج نکال سکتے ہیں۔

.10 اگر $y < x$ اور $(x+y)$ میں سے کوئی سا بھی زاویہ $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضریب نہیں ہے، تو

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

کیونکہ $y < x$ اور $(x+y)$ میں سے کوئی بھی $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضریب نہیں ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ $\cos y$ ، $\cos x$ اور

$\cos(x+y)$ صفر نہیں ہیں۔ اب

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\ &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}\end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسبت نماں دونوں کو $\cos x \cos y$ سے تقسیم کرنے پر

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad .11$$

اگر ہم متماثل 10 میں y کو $-y$ سے تبدیل کریں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\tan(x-y) &= \tan[x + (-y)] \\ &= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}\end{aligned}$$

.12 اگر کوئی بھی زاویہ $x, y, \pi(x+y)$ کا ضریب نہیں ہے، تو

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

کیونکہ $x, y, \pi(x+y)$ میں سے کوئی بھی π کا ضریب نہیں ہے، ہم یہ نکال تے ہیں کہ $\sin x, \sin y, \sin(x+y)$ غیر صفر

ہیں۔ اب

$$\begin{aligned}\cot(x+y) &= \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} \\ &= \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}\end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسبت نماں کو $\sin x \sin y$ سے تقسیم کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x} \quad .13$$

اگر متماثل 12 میں ہم y کی $-y$ رکھیں تو ہم نتیجہ پر پہنچ جاتے ہیں۔

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \text{ or } 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad .14$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{ساتھ ہی}$$

ہمارے پاس ہے $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

ہر ایک رکن کو $\cos^2 x$ سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

y کی جگہ x رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{دوبارہ}$$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad .15$$

ہمارے پاس ہے۔

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

y کی جگہ x رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \quad \text{دوبارہ}$$

ہر رکن کو $\cos^2 x$ سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad .16$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

y کی جگہ x رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad .17$$

ہمارے پاس ہے

$$\sin 3x = \sin(2x + x)$$

$$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$$

$$= 2 \sin x \cos x \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$$

$$= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x$$

$$= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x$$

$$= 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad .18$$

ہمارے پاس ہے

$$\cos 3x = \cos(2x + x)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\
&= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) \\
&= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x \\
&= 4 \cos^3 x - 3 \cos x
\end{aligned}$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \quad .19$$

ہمارے پاس ہے $\tan 3x = \tan (2x + x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - 3 \tan 2x \tan x} = \frac{2 \tan x + \tan x}{1 - \frac{2 \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}} \\
&= \frac{2 \tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2 \tan^2 x} = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}
\end{aligned}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (i) \quad .20$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (ii)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (iii)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (iv)$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$(1) \dots \cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$(2) \dots \cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \text{اور}$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے اور گھٹانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(3) \dots \cos (x + y) + \cos (x - y) = 2 \cos x \cos y$$

$$(4) \dots \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y \quad \text{اور}$$

$$(5) \dots \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \text{اس کے آگے}$$

$$(6) \dots \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad \text{اور}$$

(5) اور (6) جمع کرنے اور گھٹانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(7) \dots \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$(8) \dots \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$$

مان لیجئے $x+y = \theta$ اور $x-y = \phi$ ہے اس لیے۔

$$y = \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right) \quad \text{اور} \quad x = \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right)$$

x اور y کی قیمتیں (3)، (4)، (7)، (8) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right)$$

$$\cos \theta - \cos \phi = -2 \sin \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right)$$

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right)$$

$$\sin \theta - \sin \phi = 2 \cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta - \phi}{2} \right)$$

کیونکہ θ اور ϕ کی کوئی بھی حقیقی قدریں ہو سکتی ہیں اس لیے ہم θ کی جگہ x اور ϕ کی جگہ y لکھ سکتے ہیں۔

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

ریمارک متماثلات 20 میں دیئے گئے حصہ کے طور پر ہم نے مندرجہ ذیل نتیجے ثابت کیے ہیں۔

$$2\cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y) \quad (i) \quad 21.$$

$$-2\sin x \sin y = \cos (x + y) - \cos (x - y) \quad (ii)$$

$$2\sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y) \quad (iii)$$

$$2\cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y) \quad (iv)$$

مثال 10 ثابت کیجئے کہ

$$3 \sin \frac{\pi}{6} \sec \frac{\pi}{3} - 4 \sin \frac{5\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= 3 \sin \frac{\pi}{6} \sec \frac{\pi}{3} - 4 \sin \frac{5\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4} \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \times 2 - 4 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \times 1 = 3 - 4 \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 3 - 4 \times \frac{1}{2} = 1 = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

مثال 11 $\sin 15^\circ$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin (45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

مثال 12 $\frac{13\pi}{12}$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned}\tan \frac{13\pi}{12} &= \tan \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) = \tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

مثال 13 ثابت کیجئے

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

حل

ہمارے پاس ہے

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$$

شمار کنندہ اور نسب نماں کو $\cos x \cos y$ سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

مثال 14 ثابت کیجئے

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

حل

$$3x = 2x + x \text{ ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$\tan 3x = \tan(2x + x) \text{ اس لیے،}$$

$$\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

یا

$$\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$$

یا

$$\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$$

یا

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

یا

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2} \cos x \text{ مثال 15 ثابت کیجئے کہ}$$

حل اکائی 20(i) استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4} - x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + x - (\frac{\pi}{4} - x)}{2}\right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos x = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \sqrt{2} \cos x = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

مثال 16 ثابت کیجئے کہ $\frac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x$

حل اکائی 20(i) اور 20(iv) استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{2 \cos \frac{7x + 5x}{2} \cos \frac{7x - 5x}{2}}{2 \cos \frac{7x + 5x}{2} \sin \frac{7x - 5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{R.H.S.} \\ &= \frac{\sin 5x - 2 \sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x \end{aligned}$$

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{\sin 5x - 2 \sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \frac{\sin 5x + \sin x - 2 \sin 3x}{\cos 5x - \cos x} \\ &= \frac{2 \sin 3x \cos 2x - 2 \sin 3x}{2 \sin 3x \sin 2x} = \frac{\sin 3x (\cos 2x - 1)}{\sin 3x \sin 2x} \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \tan x = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

مشق 3.3

ثابت کیجئے کہ:

$$\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \quad .1$$

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos \sec^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \quad .2$$

$$\cot^2 \frac{\pi}{6} + \cos \sec \frac{5\pi}{6} + \tan^2 \frac{\pi}{6} = 6 \quad .3$$

$$2 \sin^2 \frac{3\pi}{4} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sec^2 \frac{\pi}{3} = 10 \quad .4$$

.5 قدر معلوم کیجئے:

$$\tan 15^\circ \quad (\text{ii}) \quad \sin 75^\circ \quad (\text{i})$$

.6 مندرجہ ذیل کو ثابت کیجئے:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - y\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \sin(x + y)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2 \quad .7$$

$$\frac{\cos(\pi + y) \cos(-x)}{\sin(\pi - x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x \quad .8$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cos(2\pi + x) \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + x) \right] = 1 \quad .9$$

$$\sin(n+1)x \sin(n+2)x + \cos(n+1)x \cos(n+2)x = \cos x \quad .10$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2} \sin x \quad .11$$

$$\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x \quad .12$$

$$\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x \quad .13$$

$$\sin 2x + 2 \sin 4x + \sin 6x = 4 \cos^2 x \sin 4x \quad .14$$

$$\cot 4x (\sin 5x + \sin 3x) = \cot x (\sin 5x - \sin 3x) \quad .15$$

$$\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x \quad .17 \quad \frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x} \quad .16$$

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x \quad .19 \quad \frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x-y}{2} \quad .18$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2 \sin x \quad .20$$

$$\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x \quad .21$$

$$\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1 \quad .22$$

$$\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x \quad .24 \quad \tan 4x = \frac{4 \tan x (1 - \tan^2 x)}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x} \quad .23$$

$$\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1 \quad .25$$

3.5 ٹرگنومیٹریائی مساواتیں (Trigonometric Equations)

ایسی مساواتیں جن میں متغیر (variable) کے ٹرگنومیٹریائی تفاعل شامل ہوں ٹرگنومیٹریائی بائی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اس سیکشن میں ہم اس طرح کی مساوات کا حل معلوم کریں گے۔ ہم پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ $\sin x$ اور $\cos x$ کی قدریں وقفہ 2π کے بعد دہرائی جاتی ہیں اور $\tan x$ کی قدر وقفہ π کے بعد دہرائی جاتی ہے۔ مساوات کے حل $0 \leq x < 2\pi$ کے لیے پرنسپل حل کہلاتے ہیں۔ جو عبارت صحیح عدد n پر مبنی ہوا ور ٹرگنومیٹریائی مساوات کے تمام حل دے اسے عمومی حل (general solution) کہتے ہیں ہم لفظ $\mathbb{Z}$ کا استعمال صحیح اعداد کے لیے کریں گے۔

مندرجہ ذیل مساواتیں ٹرگنومیٹریائی مساواتوں کو حل کرنے میں سودگار ثابت ہوں گی۔

مثال 18 مساوات $\sin x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ کے پرنسپل حل معلوم کے لیے۔

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{اور} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ہم جانتے ہیں کہ}$$

اس لیے $x = \frac{2\pi}{3}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ اس مساوات کے پرنسپل حل ہیں۔

مثال 19 مساوات $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ کے پرنسپل حل معلوم کیجئے۔

حل ہم جاننے ہیں کہ $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ اس لیے $\tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

اور $\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

اس لیے $\tan \frac{5\pi}{6} = \tan \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

اس لیے $\frac{5\pi}{6}$ اور $\frac{11\pi}{6}$ پر نپل حل ہیں۔

اب ہم ٹرگنومیٹرک مساواتوں کا عام حل معلوم کریں گے۔ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ:

$$\sin x = 0 \text{ دیتا ہے } x = n\pi \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z}$$

$$\cos x = 0 \text{ دیتا ہے } x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z}$$

اب ہم مندرجہ ذیل نتائج کو ثابت کریں گے۔

مسئلہ 1 کوئی بھی x اور y حقیقی اعداد کے لیے۔

$$\sin x = \sin y \text{ implies } x = n\pi + (-1)^n y, \text{ where } n \in \mathbf{Z}$$

ثبوت اگر $\sin x = \sin y$ تب

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0 \quad \text{یا} \quad \sin x - \sin y = 0$$

$$\sin \frac{x-y}{2} = 0 \quad \text{یا} \quad \cos \frac{x+y}{2} = 0 \text{ جو دیتا ہے}$$

$$\text{اس لیے } \frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{x-y}{2} = n\pi \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z}$$

$$x = 2(n\pi + y + 1)\pi - y \text{ یا } x = 2n\pi + y \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z}$$

$$\text{اس لیے } x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y \text{ یا } x = 2n\pi + (-1)^{2n} y \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z}$$

ان دونوں نتائج کو ساتھ ملانے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$x = n\pi + (-1)^n y \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z}$$

مسئلہ 2 کن ہی حقیقی اعداد x اور y کے لیے $\cos x = \cos y$ مطلب ہے $x = 2n\pi \pm y$ جہاں $n \in \mathbf{Z}$

ثبوت اگر $\cos x = \cos y$ تب

$$\cos x - \cos y = 0 \quad i.e. \quad -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x-y}{2} = 0 \quad \text{یا} \quad \sin \frac{x+y}{2} = 0 \quad \text{اس لیے}$$

$$n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } \frac{x-y}{2} = n\pi \quad \text{یا} \quad \frac{x+y}{2} = n\pi \quad \text{اس لیے}$$

$$n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x = 2n\pi + y \quad \text{یا} \quad x = 2n\pi - y \quad \text{یعنی}$$

$$n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x = 2n\pi \pm y \quad \text{اس لیے}$$

مسئلہ 3 ثابت کیجئے کہ اگر x اور y ، $\frac{\pi}{2}$ کے ناطق ضریب نہیں ہیں تو $\tan x = \tan y$ کا مطلب ہے

$$n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x = 2n\pi \pm y$$

ثبوت اگر $\tan x = \tan y$ تب

$$\tan x - \tan y = 0$$

$$\sin x \cos y - \cos x \sin y \quad \text{یعنی}$$

$$\sin(x - y) = 0 \quad (\text{کیونکہ؟})$$

$$n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x - y = n\pi \text{ اس کا مطلب ہے } x = n\pi + y$$

$$\text{مثال 20} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ کا حل معلوم کیجئے۔}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin \frac{\pi}{3} = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{4\pi}{3} \quad \text{ہمارے پاس ہے} \quad \text{حل}$$

$$\sin x = \sin \frac{4\pi}{3} \text{ جو دیتا ہے۔} \quad \text{اس لیے}$$

$$n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}$$

نوٹ x کی $\frac{4\pi}{3}$ ایک ایسی قدر جس کے لیے $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ x کی ایک دوسری قدر بھی لی جاسکتی ہے جس کے لیے $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو۔ اس طرح حاصل ہوئے حل یکساں ہوں گے جبکہ یہ دکھائی دینے میں الگ الگ ہیں۔

مثال 21 $\cos x = \frac{1}{2}$ کو حل کیجئے۔

حل ہمارے پاس ہے $\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$

اس لیے $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ جہاں $n \in \mathbb{Z}$

مثال 22 $\tan 2x = -\cot \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ کو حل کیجئے۔

حل ہمارے پاس ہے $\tan 2x = -\cot \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

یا $\tan 2x = \tan \left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

اس لیے $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}$ جہاں $n \in \mathbb{Z}$

یا $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$ جہاں $n \in \mathbb{Z}$

مثال 23 $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$ کو حل کیجئے۔

حل مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے:

$$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x(2 \cos 2x - 1) = 0 \quad \text{ie}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \sin 4x = 0 \quad \text{اس لیے}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos \frac{\pi}{3} & \text{یا} & \sin 4x = 0 & \text{ie} \\ n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x &= n\pi \pm \frac{\pi}{6} & \text{یا} & 4x = n\pi & \text{اس لیے} \\ n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x &= n\pi \pm \frac{\pi}{4} & \text{یا} & x = \frac{n\pi}{4} & \text{ie} \end{aligned}$$

مثال 24 $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$ کو حل کیجئے۔

حل مساوات کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0 \quad \text{یا}$$

$$(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \quad \text{یا}$$

$$\sin x = 2 \quad \text{یا} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{اس لیے}$$

لیکن $\sin x = 2$ ممکن نہیں ہے (کیوں؟)

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin \frac{7\pi}{6} \quad \text{اس لیے}$$

اس لیے حل اس طرح دیا گیا ہے۔

$$n \in \mathbf{Z} \text{ جہاں } x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$

مشق 3.4

ذیل مساواتوں کے صدر (Principal) اور عمومی (General) حل معلوم کیجئے۔

$$\sec x = 2 \quad .2 \quad \tan x = \sqrt{3} \quad .1$$

$$\csc x = -2 \quad .4 \quad \cot x = -\sqrt{3} \quad .3$$

ذیل میں دی گئی ہر ایک مساواتوں کے مجموعی حل معلوم کیجئے۔

$$\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0 \quad .6 \quad \cos 4x = \cos 2x \quad .5$$

$$\sec^2 2x = 1 - \tan 2x \quad .8 \quad \sin 2x + \cos x = 0 \quad .7$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0 \quad .9$$

متفرق مثالیں

مثال 25 اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ ، $\cos y = \frac{12}{13}$ جہاں x اور y دونوں دوسرے ربع میں واقع ہیں $\sin(x+y)$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{اب}$$

$$\cos x = \pm \frac{4}{5} \quad \text{اس لیے}$$

کیونکہ x دوسرے ربع میں ہے اس لیے $\cos x$ منفی ہے۔

$$\cos x = -\frac{4}{5} \quad \text{اس لیے}$$

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \quad \text{اب}$$

$$\sin y = \pm \frac{5}{13} \quad \text{یعنی}$$

کیونکہ y دوسرے ربع میں موجود ہے، $\sin y$ مثبت ہے۔ اس لیے $\sin y = \frac{5}{13}$ اور $\cos y$ کی قیمتیں مساوات (i) میں

رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sin(x+y) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{5}{13} = \frac{36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

مثال 26 ثابت کیجئے کہ

$$\cos 2x \cos \frac{x}{2} - \cos 3x \cos \frac{9x}{2} = \sin x \sin \frac{5x}{2}$$

حل ہمارے پاس ہے۔

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S} &= \frac{1}{2} \left[2\cos 2x \cos \frac{x}{2} - 2\cos \frac{9x}{2} \cos 3x \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x + \frac{x}{2} \right) - \cos \left(2x - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(\frac{9x}{2} + 3x \right) - \cos \left(\frac{9x}{2} - 3x \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{15x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{15x}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[-2 \sin \left\{ \frac{\frac{5x}{2} + \frac{15x}{2}}{2} \right\} \sin \left\{ \frac{\frac{5x}{2} - \frac{15x}{2}}{2} \right\} \right] \\
 &= -\sin 5x \sin \left(-\frac{5x}{2} \right) = \sin 5x \sin \frac{5x}{2} = \text{R.H.S}
 \end{aligned}$$

مثال 27 $\tan \frac{\pi}{8}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے $X = \frac{\pi}{8}$ تب $2X = \frac{\pi}{4}$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{اب}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \quad \text{یا}$$

$$1 = \frac{2y}{1 - y^2} \quad \text{مان لیجئے } y = \tan \frac{\pi}{8} \text{ تب}$$

$$y^2 + 2y - 1 = 0 \quad \text{یا}$$

$$y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \quad \text{اس لیے}$$

کیونکہ $\frac{\pi}{8}$ پہلے ربع میں موجود ہے اس لیے $y = \tan \frac{\pi}{8}$ مثبت ہے۔

اس لیے $Tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

مثال 28 اگر $Tan x = \frac{3}{4}$ ، $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ، $Sin \frac{x}{2}$ ، $Cos \frac{x}{2}$ اور $Tan \frac{x}{2}$ کی قیمتیں معلوم کیجئے۔

حل کیونکہ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ، $Cos x$ منفی ہے۔

ساتھ ہی $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2}$

اس لیے $Sin \frac{x}{2}$ بھی مثبت ہوگا اور $Cos \frac{x}{2}$ منفی ہے

اب $Sec^2 x = 1 + Tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

اس لیے $Cos x = -\frac{4}{5}$ یا $Cos^2 x = \frac{16}{25}$ (کیونکہ؟)

اب $2Sin^2 \frac{x}{2} = 1 - Cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$

اس لیے $2Sin^2 \frac{x}{2} = \frac{9}{10}$

یا $Sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (کیونکہ؟)

دوبارہ $2Cos^2 \frac{x}{2} = 1 + Cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

اس لیے $Cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

یا $Cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ کیوں؟

اس لیے $Tan \frac{x}{2} = \frac{Sin \frac{x}{2}}{Cos \frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1} \right) = -3$

مثال 29 ثابت کیجئے کہ $Cos^2 x + Cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + Cos^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{2}$

ہمارے پاس ہے۔ حل

$$\begin{aligned}
 \text{L. H. S} &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos \frac{2\pi}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos \frac{\pi}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [3 + \cos 2x + 2\cos 2x] = \frac{3}{2} \quad \text{R.H.S}
 \end{aligned}$$

متفرق مشق باب 3

ثابت کیجئے کہ:

$$2\cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0 \quad .1$$

$$(\sin 3x + \sin x) \sin x + (\cos 3x - \cos x) \cos x = 0 \quad .2$$

$$(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2 \frac{x+y}{2} \quad .3$$

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2 \frac{x-y}{2} \quad .4$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x \quad .5$$

$$\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x \quad .6$$

$$\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} \quad .7$$

$\sin \frac{x}{2}$ ، $\cos \frac{x}{2}$ اور $\tan \frac{x}{2}$ کی قسمیں ذیل میں معلوم کیجئے۔

$$\tan x = -\frac{4}{3} \text{ دوسرے ربع میں ہے۔} \quad .8$$

$$\cos x = -\frac{1}{3} \text{ تیسرے ربع میں ہے۔} \quad .9$$

$$\sin x = \frac{1}{4} \text{ دوسرے ربع میں ہے۔} \quad .10$$

خلاصہ (Summary)

◆ اگر ایک قوس جسکی لمبائی 1 ہے ایک دائرہ میں جسکا نصف قطر r ہے θ ریڈین کا زاویہ بناتا ہے۔ تو $l = r\theta$

◆ ریڈین پیمائش $\times \frac{\pi}{180}$ ڈگری پیمائش

◆ ڈگری پیمائش $\times \frac{\pi}{180}$ ریڈین پیمائش

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \blacklozenge$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad \blacklozenge$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \quad \blacklozenge$$

$$\cos(2n\pi + x) = \cos x \quad \blacklozenge$$

$$\sin(2n\pi + x) = \sin x \quad \blacklozenge$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \blacklozenge$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \blacklozenge$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \blacklozenge$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \blacklozenge$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \blacklozenge$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \blacklozenge$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \blacklozenge$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad \blacklozenge$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \blacklozenge$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \quad \cos(2\pi - x) = \cos x$$

$$\text{اگر کسی بھی زاویہ } y, x \text{ اور } (x \pm y), \frac{\pi}{2} \text{ کے طاق ضرب نہیں ہیں، تب} \quad \blacklozenge$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad \blacklozenge$$

$$\text{اگر کسی بھی زاویہ } y, x \text{ اور } (x \pm y), \pi \text{ کے ضرب نہیں ہیں، تب} \quad \blacklozenge$$

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x} \quad \blacklozenge$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \blacklozenge$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \quad \blacklozenge$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \blacklozenge$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad \blacklozenge$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \blacklozenge$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \quad \blacklozenge$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (i) \quad \blacklozenge$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (ii)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (iii)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (iv)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) \quad (i) \quad \blacklozenge$$

$$-2 \sin x \sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y) \quad (ii)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y) \quad (iii)$$

$$2 \cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y) \quad (iv)$$

$$\sin x = 0 \text{ دیتا ہے } x = n\pi \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z} \quad \blacklozenge$$

$$\cos x = 0 \text{ دیتا ہے } x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z} \quad \blacklozenge$$

$$\sin x = \sin y \text{ کا مطلب ہے } x = n\pi + (-1)^n y \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z} \quad \blacklozenge$$

$$\cos x = \cos y \text{ کا مطلب ہے } x = 2n\pi \pm y \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z} \quad \blacklozenge$$

$$\tan x = \tan y \text{ کا مطلب ہے } x = 2n\pi + y \text{ جہاں } n \in \mathbf{Z} \quad \blacklozenge$$

تاریخ کے اوراق سے

ٹرگنومیٹری کی تعلیم پہلے ہندوستان میں شروع ہوئی تھی۔ قدیمی ہندوستانی ریاضی داں آریہ بھٹ (476) برہم گیتا (598AD) بھاسکر (600AD) اور بھاسکر II (1114 AD) کو اہم نتائج ملے۔ یہ تمام معلومات پہلے ہندوستان سے مدیہ ایشیا اور پھر وہاں سے یورپ کی طرف گئی۔ یونانی بھی ٹرگنومیٹری کی تعلیم شروع کر چکے تھے لیکن ان کا راستہ انارڈی پن (بغیر سوچ سمجھے آگے بڑھنے) کا تھا کہ جب ہندوستانی کھوج سب کو معلوم ہوئی، تب ہی دنیا میں سب نے اسے اپنالیا۔

ہندوستان میں جدید ٹرگنومیٹریکی تعامل کا پیش رو جو زاویہ کے sine کہلاتے تھے اور Sine تعامل (Sine function) کا آغاز اجرام فلکی کے لئے ایک عظیم دین ہے اور ریاضی کی تاریخ ہے۔

بھاسکر I، (600 AD کے قریب) نے سائن تعامل کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ضابطہ (Formulas) دیئے جہاں زاویہ 90^0 سے زیادہ ہوں۔ سولھویں صدی میں Malaylam کام جو Yuktibhasa کہلاتا ہے میں $(A+B)$ ، sine کے پھیلاؤ کا ثبوت ہے۔ Sines اور Cosines کی درست عبارت 18^0 ، 36^0 ، 54^0 ، 72^0 وغیرہ بھاسکر II نے دی ہے۔

$\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$ وغیرہ کی علامتیں قوس Sinx قوس Cosx وغیرہ کے ماہر فلکیات Sir John F.W. نے تجویز کیں۔ Thales کا نام (B.C 600 کے قریب) مستقبل (یکساں) طور پر اونچائی اور فاصلے کے مسائل کے ساتھ جڑا ہے۔ اسے اس بات کا شرف حاصل ہے اس نے مصر کے حرم (Pyramid) کی اونچائی حرم کے عکس کے اونچائی کی مدد سے معلوم کی جو ایک امدادی عملہ (Staff) جسکی اونچائی پہلے سے ہی معلوم تھی ان دونوں کی نسبت کا موازنہ کیا۔

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan (\text{sun's attitude})$$

(سورج کی شعاعوں کا سطح سمندر سے زاویہ) $\tan =$

کہا جاتا ہے کہ Thales نے ایک کشتی کا فاصلہ سطح سمندر پر نکالا تھا جو اس نے یکساں مثلثوں کے ضلعوں کی نسبت کا استعمال کر کے کیا۔ یکساں خصوصیت کا استعمال اونچائی اور فاصلہ کے مسئلہ پر قدیم ہندوستانی کاموں میں پایا جاتا ہے۔

