ضمیمہ 2

# ریاضیاتی ماڈلنگ کا تعارف
# (INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELLING)

## A2.1 تعارف (Introduction)

پچھلی کلاسوں ہی سے آپ اپنے گردونواح سے متعلق مسئلوں کو حل کر رہے ہیں۔ مثال کے طور پر آپ نے سادہ سے متعلق سوالوں کو اس کو معلوم کرنے کے فارمولے کے استعمال سے حل کیا ہے۔ فارمولہ (یا مساوات) سادہ سود اور اس سے متعلق تین مقداریں، اصل زر، سود کی شرح اور مدّت کے درمیان تعلق ہوتا ہے۔ یہ فارمولہ ریاضیاتی موڈل کی ایک مثال ہے۔ ایک ریاضیاتی ماڈل ایک ریاضیاتی تعلق ہے جو اصل زندگی کے مسئلہ کو بیان کرتا ہے ریاضیاتی موڈل بہت سے اصل زندگی کے مسائل کو حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے جیسے:

- سیٹلائٹ چھوڑنے میں
- مون سون کے آنے کی پیشین گوئی میں
- گاڑیوں سے ہوئی آلودگی کو کنٹرول کرنے میں۔
- بڑے شہروں میں ٹریفک کی بھیڑ کو کم کرنے میں۔

اس باب میں ہم آپ کو ریاضیاتی موڈل بنانے کے عمل سے متعارف کرائیں گے جو ریاضیاتی موڈلنگ کہلاتا ہے۔ ریاضیاتی موڈلنگ میں ہم اصل زندگی سے متعلق کوئی مسئلہ لیتے ہیں اور اس کو ایک معادل ریاضیاتی مسئلہ کے طور پر لکھتے ہیں پھر ہم اس ریاضیاتی مسئلہ کو حل کرتے ہیں اور اس کے حل کی ترجمانی اصل زندگی کے مسئلہ کی زبان میں کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم دیکھتے ہیں کہ یہ حل کسی قدر اصل زندگی کے مسئلہ کے لئے موضوع ہے۔ اس طرح سے ریاضیاتی موڈلنگ کے چار مراحل، تشکیل، حل، ترجمانی اور معقولیت ہوتے ہیں۔

ہم اس کی شروعات سیکشن A2.2 میں آپ کے ذریعہ اپنائے گئے عبارتی سوالوں کو حل کرنے کے عمل پر نظر ڈال کر کرتے

© NCERT not to be republished

ہیں یہاں ہم پہلے وہ عبارتی سوال زیر بحث لائیں گے جو آپ کے ذریعہ پچھلی کلاسوں میں حل کئے گئے سوالوں سے مشابہہ ہیں۔ بعد میں ہم دیکھیں گے عبارتی سوالوں کو حل کرنے میں استعمال ہوئے کچھ اقدام ریاضیاتی موڈلنگ میں بھی استعمال ہوتے ہیں۔

اگلے سیکشن میں یعنی سیکشن A2.3 میں ہم کچھ سادہ سے موڈل کا مطالعہ کریں گے۔

سیکشن A2.4 میں ہم موڈلنگ کے تمام طریقۂ اس کے فائدہ اور کچھ نقصانات کا مطالعہ کریں گے۔

## A2.2: عبارتی سوالات کی نظر ثانی (Review of Word Problems)

اس باب میں ہم کچھ عبارتی سوالوں کا مطالعہ کریں گے جو ایسے ہی ہیں جیسے آپ پچھلی کلاسوں میں حل کر چکے ہیں۔ آیئے راست تناسب کے سوالوں سے شروع کرتے ہیں۔

**مثال 1:** میں نے اپنی کار سے 48 لیٹر پٹرول میں 432 کلومیٹر کا سفر کیا۔ اپنی کار سے مجھے ایسی جگہ جانا ہے جو 180 کلومیٹر کے فاصلہ پر ہے۔ مجھے کتنے پیٹرول کی ضرورت ہوگی؟

**حل:** اس سوال کو حل کرنے میں شامل اقدام کی ہم فہرست بنائیں گے۔

**قدم 1: تشکیل:** آپ جانتے ہیں کہ جتنا لمبا سفر آپ کریں گے اتنا ہی پٹرول زیادہ استعمال ہوگا یعنی پٹرول کی مقدار طے کئے گئے فاصلہ کے (راست) سیدھے تناسب میں ہے۔

432 کلومیٹر کا سفر کرنے کے لئے پٹرول کی ضرورت = 48 لیٹر

180 کلوم میٹر کا سفر کرنے کے لیے پٹرول کی ضرورت = ؟

**ریاضیاتی شکل:** مان لیجیے

طے کیا گیا فاصلہ = x

ضرورت پڑنے والا پٹرول = y، x کے راست تناسب میں ہے۔

اس لیے جہاں k ایک مستقلہ ہے $y = kx$

میں نے 48 لیٹر پٹرول سے 432 کلومیٹر کا فاصلہ طے کر لیا تھا۔

اس لئے $y=48,\ x=432$

© NCERT not to be republished

اس لئے $k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}$

کیوں کہ y=kx اس لئے $y = \frac{1}{9}x$ (1)

مساوات (1) جتنا پٹرول درکار ہے اور طے کئے گئے فاصلہ کے درمیان تعلق کو بیان کرتی ہے۔

**قدم 2: حل:** ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ 180 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کے لئے ہمیں کتنے پٹرول کی ضرورت ہوگی۔ اس کے لئے ہمیں y کی قدر معلوم کرنی ہے جب x = 180 ہو، x = 180 (1) ہمیں رکھنے سے میں حاصل ہوتا ہے

$$y = \frac{180}{9} = 20$$

**قدم 3: ترجمانی:** کیوں کہ y=20 اس لئے ہمیں 180 کلومیٹر کا فاصلہ طے کرنے میں 20 لیٹر پٹرول کی ضرورت ہوگی۔ کیا آپ کو ایسا لگتا ہے کہ تمام صورت حال میں ہم فارمولہ (1) استعمال نہیں کر سکتے؟ مثال کے طور پر فرض کیجیے 432 کلومیٹر کا راستہ پہاڑی ہے 180 کلومیٹر کا راستہ پلین علاقہ کا ہے۔ پہاڑی راستہ پر کار میں پٹرول تیز شرح سے خرچ ہوگا جب کہ پلین علاقہ میں کم شرح سے۔ اس طرح سے یہ فارمولہ ان ہی حالات میں کام کرے گا جب دونوں فاصلوں میں استعمال ہونے والے پٹرول کی شرح مساوی ہو۔ یا اگر حالتوں میں فرق ہو تو پٹرول کی مقدار میں فرق بہت کم ہو۔ صرف انہی صورت حال میں استعمال ہوا۔ پٹرول طے کئے گئے فاصلہ کے سیدھے تناسب میں ہوگا۔ سوال حل کرتے وقت ہم اسے مان کر چلتے ہیں کہ حالات یکساں ہوں گے۔

**مثال 2:** فرض کیجیے سدھیر نے 8٪ سالانہ کی شرح سے سادہ سود پر 15000 روپے کی سرمایہ کاری کی۔ سرمایہ کاری سے واپس ملنے والی رقم سے وہ 19000 روپئے قیمت خرید والی ایک واشنگ مشین خریدنا چاہتا ہے وہ کتنی مدّت تک 15000 روپئے کی سرمایہ کاری کرے کہ اس کو واشنگ مشین خریدنے کے لئے کافی رقم ہو؟

**حل: قدم 1: تشکیل:** یہاں ہم اصل زر اور سود کی شرح جانتے ہیں: سود وہ رقم ہے جو اُسے 15000 روپئے کے علاوہ واشنگ مشین خریدنے کے لئے درکار ہے، ہمیں سالوں کی تعداد معلوم کرنی ہے۔

**ریاضیاتی شکل:** سادہ سود کا فارمولہ ہے۔ $1 = \frac{pnr}{100}$

جہاں اصل زر=p ‘سالوں کی تعداد=n سود کی شرح = r % اور سادہ سود= I ہے۔

یہاں اصل زر=15000 روپیے ہے

واشنگ مشین خریدے کے لئے سدھیر کو درکار رقم=19000

اس لئے اس کو سود لینا ہوگا 15000 – 19000

=4000 روپیے

سالوں کی تعداد جب تک 15000 روپئے جمع کرنا ہیں = n

8٪ کی شرح سے n سالوں میں 15000 روپئوں پر سود=I

تب، $I = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$

اس لئے، I = 200 n (1)

ہمیں سالوں کی تعداد اور سود کے درمیان ایک تعلق دیتا ہے اگر 8% سالانہ کی شرح سے 15000 روپیوں کی سرمایہ کاری کی جائے۔

ہمیں وہ مدت معلوم کرنی ہے جس میں سود 4000 روپئے حاصل ہو‘ (1) میں I=4000 رکھنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$4000 = 1200\,n \quad \text{.....} \qquad (2)$$

**قدم 2: سوال کا حل:** (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}$$

**قدم 3: ترجمانی:** کیوں کہ $n = 3\frac{1}{3}$ اور ایک سال کا ایک تہائی 4 مہینہ ہوتا ہے اس لئے سدھیر 3 سال اور 4 مہینہ بعد واشنگ مشین خرید سکتا ہے۔

کیا آپ نے مندرجہ بالا مثال میں جو فرض کیا تھا اس کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟ ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ سود کی شرح اس مدّت تک یکساں رہتی ہے جس مدّت کی ہمیں سود کی تحسیب کرنی ہوتی ہے۔ نہیں تو فارمولہ $\frac{Pnr}{100}$ کام نہیں کرے گا‘ ہمیں یہ بھی مان کر چلنا ہوگا کہ جب تک سدھیر کے پاس پوری رقم نہیں آجاتی واشنگ مشین کی قیمت نہیں بڑھتی۔

**مثال 3:** ایک ناؤ دریا میں بہاؤ کے ساتھ چلتے ہوئے دریا کے کنارے موجود دو شہروں کے درمیان کا فاصلہ پانچ گھنٹوں میں

طے کرتی ہے۔ یہی فاصلہ وہ بہاؤ کے مخالف چلتے ہوئے 6 گھنٹوں میں طے کرتی ہے۔ اگر پانی کی رفتار 2km/sec ہو تو ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار معلوم کیجیے؟

**حل قدم 1: تشکیل:** ہم دریا کی رفتار اور دو جگہوں کے درمیان فاصلہ طے کرنے میں لیا گیا وقت کے بارے میں جانتے ہیں ہمیں ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار معلوم کرنی ہے۔

**ریاضیاتی شکل:** مان لیجیے ناؤ کی رفتار $x$ ' لیا گیا وقت t اور طے کیا گیا فاصلہ $y$ ہے۔

تب $y = xt$ (1)

مان لیجیے دو جگہوں کے درمیان فاصلہ d

دریا کی رفتار۔ناؤ کی رفتار = بہاؤ کے مخالف جاتے ہوئے ناؤ کی اصل رفتار ہوگی۔

کیوں کہ ناؤ بہاؤ کے خلاف جا رہی ہے۔

اس لئے بہاؤ کے خلاف ناؤ کی رفتار = $(x\text{-}2)$ km/hr

بہاؤ کے خلاف چلتے ہوئے دو شہروں کے درمیان فاصلہ 6 گھنٹہ میں طے کرتی ہے۔

اس لئے (1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $d = 6(x\text{-}2)$ (2)

بہاؤ کے ساتھ چلتے وقت دریا کی رفتار ناؤ کی رفتار میں جمع کرنی ہوگی۔

اس لئے بہاؤ کے ساتھ ناؤ کی رفتار ہے = $(x+2)$ Km/h

ناؤ وہی فاصلہ بہاؤ کے ساتھ چلنے میں 5 گھنٹہ میں طے کرتی ہے اس لئے

$$d = 5\,(x+2) \quad (3)$$

(2) اور (3) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$5\,(x+2) = 6\,(x-2) \quad (4)$$

**قدم 2: حل معلوم کرنا:** (4) میں $x$ کو حل کرنے پر ہم کو $x=22$ حاصل ہوتا ہے

**قدم 3: ترجمانی:** کیوں کہ $x = 22$ اس لئے ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار ہے 22km/h

مذکورہ بالا مثال میں ہم جانتے ہیں کہ دریا کی رفتار ہر جگہ ایک سی نہیں رہتی۔ کناروں کی طرف یہ ہلکے بہتا ہے جبکہ بیچ

© NCERT not to be republished

میں تیزی سے ناؤ کناروں سے شروع کرتی ہے اور دریا کے بیچ میں چلتی ہے جب یہ اپنی منزل کی طرف پہنچتی ہے تو اس کی رفتار کم ہو جاتی ہے۔اس لئے دریا کے بیچ اور دریا کے کنارے پر ناؤ کی رفتار میں کچھ فرق ہوتا ہے۔ کیوں کہ یہ دریا کے کنارے پر بہت کم وقت کے لئے ہوتی ہے اس لئے رفتار کا فرق بہت کم مدت کے لئے اثر انداز ہوگا۔اس لئے ہم دریا کی رفتار کے علاوہ پانی کی سطح اور ناؤ کی سطح کے درمیان رگڑ (friction) بھی ناؤ کی اصل رفتار پر اثر انداز ہوتی ہے۔ہم یہ بھی مان لیتے ہیں کہ یہ اثر بہت چھوٹا ہوتا ہے۔

اس لئے ہم فرض کرتے ہیں

1. دریا اور ناؤ کی رفتار ہمہ وقت یکساں رہتی ہے۔

2. ہوا کی رگڑ اور ناؤ اور دریا کے درمیان کی رگڑ کو ہم نظر انداز کردیتے ہیں۔

مذکورہ بالا مفروضات کو نظر میں رکھتے ہوئے، ہمیں ٹھہرے ہوئے پانی میں ناؤ کی رفتار معلوم کرنی ہے جیسا ہم اوپر عبارتی سوالوں میں دیکھ چکے ہیں کہ اس قسم کے سوالوں کو حل کرنے میں 3 قدم ہوتے ہیں، یہ ہیں:

**1. تشکیل:** ہم سوال کا تجزیہ کرتے ہیں کہ کون سی بات کا سوال کے حل پر زیادہ اثر ہوتا ہے۔ یہ متعلقہ چیزیں (Relevant factors) کہلاتی ہیں، پہلی مثال میں ہماری متعلقہ چیزیں یا باتی طے کیا گیا فاصلہ اور خرچ ہوا پٹرول تھیں۔ ہم دوسری چیزیں جیسے راستہ کا فرق چلنے کی رفتار وغیرہ کو نظر انداز کردیتے ہیں نہیں تو سوال کو حل کرنا بہت مشکل ہو جائے۔ وہ چیزیں جن کو ہم نظر انداز کردیتے ہیں غیر متعلقہ چیزیں یا باتیں کہلاتی ہیں۔

پھر ہم ریاضیاتی مسئلہ کو ایک یا ایک سے زیادہ ریاضیاتی مساواتوں کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

**2. حل:** ہم پھر مناسب طریقوں کا استعمال کرکر قدم 1 میں ریاضیاتی مساواتوں کو حل کر کے مسئلہ کا حل معلوم کر لیتے ہیں۔

**3. ترجمانی:** ہم دیکھتے ہیں کہ قدم 2 میں حاصل حل کا مطلب ہے اصل عبارتی سوال کے سیاق وسباق میں۔

یہاں آپ کے لئے کچھ مشقیں ہیں آپ عبارتی سوالات کے حل میں شامل اقدام کی سمجھ کی جانچ کرنے کے لئے مذکورہ بالا اقدام مندرجہ ذیل مسائل کو حل کر کے کرسکتے ہیں۔

## مشق A2.1

مندرجہ ذیل ہر ایک مسئلہ میں صاف طور پر بیان کیجیے کہ مذکورہ بالا اقدام 1، 2 اور 3 کے دوران متعلقہ اور غیر متعلقہ چیزیں

© NCERT not to be republished

(باتیں) کیا ہیں۔

1. فرض کیجیے ایک کمپنی کو کچھ مدّت کے لئے ایک کمپیوٹر کی ضرورت ہے۔ کمپنی کمپیوٹر یا تو 2000 روپیہ مہنیہ کرائے پر لے سکتی ہے یا 25000 روپئے میں خرید سکتی ہے۔ اگر کمپنی کو لمبے عرصہ تک کمپیوٹر کا استعمال کرنا پڑے تو اُسے اتنا زیادہ کرایہ دینا پڑے گا کہ اُس کے لئے کمپیوٹر خریدنا زیادہ سستا سودا ہوگا۔ دوسرے طرف اگر کمپنی کو صرف ایک مہینہ تک استعمال کرنا ہو تو کرائے پر لینا اس کے لئے سستا ہوگا۔ مہینوں کی وہ تعداد بتائے جس کے بعد ایک کمپیوٹر خریدنا سستا ہوگا۔

2. مان لیجیے ایک کار ایک مقام A سے شروع کر کے 40 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے مقام B کی طرف روانہ ہوتی ہے اُسی وقت ایک دوسری کار مقام B سے 30 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے سفر کرتی ہوئی مقام B کی طرف روانہ ہوتی ہے۔ اگر A اور B کے درمیان 100 کلومیٹر کا فاصلہ ہے تو کتنے وقت بعد دونوں ایک دوسرے سے ملیں گے؟

3. چاند کا زمین سے فاصلہ 3,84,000 کلومیٹر اور زمین کے چاروں طرف اس کا راستہ تقریباً دائری ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے وہ زمین کے چاروں طرف فاصلہ 24 گھنٹے میں پورا کرتا ہے تو وہ کس رفتار سے زمین کے ارد گرد گھوم رہا ہے۔

4. ایک کنبہ اُن مہینوں میں جن میں پانی گرم کرنے والے ہیٹر کا استعمال نہیں ہوتا بجلی کا اوسطاً بل 1000 روپیہ ادا کرتا ہے اور جن مہینوں میں پانی گرم کرنے والا ہیٹر استعمال ہوتا ہے اُن میں اوسطاً بجلی کا بل 1240 روپئے ہوتا ہے۔ واٹر ہیٹر استعمال کرنے کا خرچ 8 روپیہ فی گھنٹہ ہے۔ ایک دن میں اوسطاً واٹر ہیٹر کتنے گھنٹے استعمال ہوتا ہے۔

## A2.3: کچھ ریاضیاتی ماڈل (Some Methematical Models)

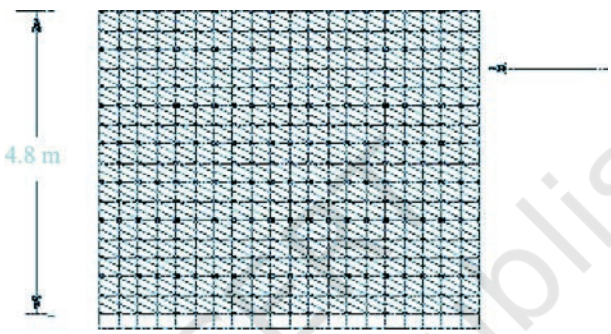
ابھی تک ہمارے مطالعہ میں کوئی بات بھی نئی نہیں تھی۔ اس سیکشن میں ہم پچھلے سیکشن میں مطالعہ کئے گئے تین اقدام میں ایک اور کا اضافہ کرنے جارہے ہیں اور یہ قدم ہے validation قانونی شکل قانونی شکل سے ہماری مراد کیا ہے؟ آیئے دیکھتے ہیں، اپنی اصل۔ زندگی میں ہم ایسے ماڈل کو قبول نہیں کرتے جو ایسے جواب دیتا ہو جو حقیقت سے کوسوں دور ہوں۔ حقیقت سے دور جوابات کی جانچ کے اس طریقہ کو اور ضرورت پڑنے پر اس کی شکل میں خاطر خواہ تبدیلی لانے کو قانونی شکل کہتے ہیں۔ یہ موڈلنگ میں بہت اہم قدم ہے۔ ہم اس قدم کا تعارف اس سیکشن میں کریں گے۔

پہلے ہم ایک مثال لیتے ہیں جہاں ہمیں قانونی شکل کے بعد ماڈل میں ترمیم کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔

© NCERT not to be republished

**مثال 4:** فرض کیجیے آپ کے پاس 6m لمبا اور 5m چوڑا ایک کمرہ ہے آپ اس کے فرش پر 30m ضلع والے مربع موزائک ٹائل لگانا چاہتے ہیں۔آپ کو کتنے ٹائلوں کی ضرورت ہوگی؟ اس کا ایک ریاضیاتی موڈل بنا کر حل کیجیے۔

**حل: تشکیل:** سوال کو حل کرنے کے لئے ہمیں کمرہ اور ٹائیل کے رقبہ پر غور کرنا ہے۔ٹائیل کا ضلع 0.3m کا ہے کیوں کہ لمبائی 6m ہے اس لئے ہم کمرہ کے فرش میں کمرہ کی لمبائی کے ساتھ $\frac{6}{0.3} = 20$ ٹائیل فٹ کر سکتے ہیں۔(شکل A2.1 دیکھیے)




شکل A2.1

کیوں کہ کمرہ کی چوڑائی 5 میٹر ہے اس لئے ہم $\frac{5}{0.3} = 16.67$ کالموں میں 16 ٹائل فٹ کر سکتے ہیں کیوں 15x0.3=4.8، 5-4.8=0.2 یعنی 0.2 میٹر چوڑائی کے جگہ پر ٹائیل نہیں لگے گی۔یہ حصہ ٹائلوں کو کاٹ کر اس سائز کے بنانے کے بعد اُس جگہ پر لگانے سے ڈھکے گا۔فرش کی چوڑائی جو ٹائیلوں سے ڈھکی ہوئی نہ ہوگی 0.2m ہے جو ٹائل کی لمبائی یعنی 0.3 کے آدھے سے زیادہ ہے۔اس لیے ہم ٹائیلوں کو دو برابر حصوں میں توڑ کر باقی بچے حصوں میں فٹ نہیں کر سکتے ہیں۔

**ریاضیاتی شکل:** ہمارے پاس ہے۔

غیر ڈھکے رقبہ کے ٹائیلوں کی تعداد (چوڑائی کے ساتھ ٹائیلوں کی تعداد x لمبائی کے ساتھ ٹائیلوں کی تعداد) = ٹائیلوں کی کل تعداد

**حل:** جیسا ہم نے اوپر کہا ہے کہ لمبائی کے ساتھ ٹائیل کی تعداد 20 ہے اور چوڑائی کے ساتھ 16 اس لئے ہمیں آخری قطار کے لئے 20 اور ٹائیلوں کی ضرورت ہوگی۔ان تمام قدروں کو (1) میں رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے 340=20+320=20+(20x16)

© NCERT not to be republished

**ترجمانی:** فرش کو ڈھکنے کے لئے ہمیں 340 ٹائیلوں کی ضرورت ہوگی۔

**قانونی توثیق (Validation):** اصل زندگی میں آپ کا راج مستری آپ سے اُن ٹائیلوں کے بدلے میں کچھ اور ٹائیل لانے کے لئے کہے گا جو اُس نے کاٹ کر چھوٹے سائز کے بنانے میں برباد کردئے تھے۔ اس تعداد کا دارومدار آپ کے مستری کے ہنر پر ہوگا۔ لیکن اس کے لئے ہمیں مساوات (1) کی ترمیم کرنی ہوگی۔ اس سے آپ کو ٹائیلوں کی تعداد کا ایک رف آئیڈیا ہو جائے گا۔ اس لئے ہم یہیں پر رُک جائیں گے۔

آیئے اب ایک دوسری صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

**مثال 5:** 2000 میں اقوام متحدہ (UN) کے 191 ممبر ممالک نے ایک اقرارنامہ پر دستخط کئے۔ اس اقرارنامہ میں ممالک نے اس بات پر اتفاق کیا کہ سال 2015 تک ترقی کے کچھ نشانے حاصل کئے جائیں۔ یہ ہزارے کی ترقی کے نشانے کہلائے۔ اس میں ایک نشانہ ہے جنس (Gender) کی مساوات کو فروغ دینا۔ یہ طے کرنے کے لیے کہ اس گول (نشانہ) کو کس حد تک حاصل کیا گیا ایک پیمانہ بنایا گیا اور وہ تھا:

لڑکے اور لڑکیوں کی' ابتدائی' ثانوی اور کالج کی تعلیم میں نسبت۔ کیوں کہ ہندوستان نے بھی اس اقرارنامہ پر دستخط کئے تھے۔ اس لیے اس نسبت کو بہتر بنانا اس کے لئے ضروری تھا۔ جدول A2.1 میں ان فی صد لڑکیوں کے اعداد و شمار دئے گئے ہیں جنھوں نے ابتدائی (پرائمری) اسکولوں میں داخلہ لیا۔

**جدول A2.1**

| سال | داخلہ % میں |
|---|---|
| 1991-92 | 41.9 |
| 1992-93 | 42.6 |
| 1993-94 | 42.7 |
| 1994-95 | 42.9 |
| 1995-96 | 43.1 |
| 1996-97 | 43.2 |

© NCERT not to be republished

| | |
|---|---|
| 1997-98 | 43.5* |
| 1998-1999 | 43.5* |
| 1999-2000 | 43.6* |
| 2000-2001 | 43.7* |
| 2001-2002 | 44.1* |

* سے مراد عارضی اعداد و شمار ہیں

ذرائع : Web page Deptt. of Education (GOI) Eductional Statistics

ان آنکڑوں کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی طور پر یہ بیان کیجیے کہ پرائمری اسکول میں لڑکیوں کے داخلے کا تناسب کس شرح سے بڑھتا ہے۔ اُس سال کا تخمینہ بھی لگایئے جس میں لڑکیوں کا داخلہ 5٪ ہو جائے گا۔

**حل:** پہلے ہم اس مسئلہ کو ریاضی کے مسئلہ کی شکل میں تبدیل کرتے ہیں۔

**قدم:تشکیل:** جدول A2.1 1991-92، 1992-93 وغیرہ سالوں میں داخلوں کے بارے میں بتاتا ہے کیوں کہ طلباء تعلیمی سال کے شروع میں ہی اسکول میں داخلہ لیتے ہیں اس لئے ہم سال 1991، 1992 لے سکتے ہیں۔ فرض کر لیجیے کہ لڑکیوں کافی صد جو پرائمری اسکول میں داخلہ لیتی ہیں۔ اُسی شرح سے بڑھ رہا ہے جس شرح سے جدول A2.1 میں دکھایا گیا ہے۔ اس لئے سالوں کی تعداد اہم ہے نہ کہ کون سے سال۔

(ایسی ہی ایک صورت حال جب ہم 8% سالانہ کی شرح سے تین سال کا سود معلوم کرتے ہیں جس میں اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ وہ تین سال 1999 سے 2003 تک ہیں یا 2001 سے 2004 تک۔ جو چیز اہم ہے اس میں وہ ہے سود کی شرح جو دی گئی ہے) یہاں بھی ہم دیکھیں گے کہ داخلہ 1991 کے بعد کیسے بڑھے ہیں اور ایسا ہم 1991 کے بعد گذرے سالوں کی تعداد اور داخلوں میں موازنہ کر کے کر سکتے ہیں۔ اس لئے 1991 کو 0 سال لیتے ہیں اور 1992 کو 1 سال کیوں کہ 1991 کے بعد 1992 تک 1 سال گذر چکا ہے۔ اسی طرح سے ہم 1993 کے لئے 2، 1994 کے لئے 3 وغیرہ لکھتے ہیں۔ اسلئے اب جدول A2.1 جدول A2.2 کی طرح دکھے گی۔

جدول A2.2

| سال | داخلہ ٪ میں |
|---|---|
| 0 | 41-9 |
| 1 | 42.6 |
| 2 | 42.7 |
| 3 | 42.9 |
| 4 | 43.1 |
| 5 | 43.2 |
| 6 | 43.5 |
| 7 | 43.5 |
| 8 | 43.6 |
| 9 | 43.7 |
| 10 | 44.1 |

داخلہ میں اضافہ مندرجہ ذیل جدول میں دکھایا گیا ہے:

جدول A2.3

| سال | داخلہ ٪ میں | اضافہ |
|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 0 |
| 1 | 42.6 | 0.7 |
| 2 | 42.7 | 0.1 |
| 3 | 42.9 | 0.2 |
| 4 | 43.1 | 0.2 |
| 5 | 43.2 | 0.1 |

© NCERT not to be republished

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 43.5 | 0.3 |
| 7 | 43.5 | 0 |
| 8 | 43.6 | 0.1 |
| 9 | 43.7 | 0.1 |
| 10 | 44.1 | 0.4 |

1991 سے 1992 تک ایک سال کے عرصہ کے آخر میں داخلوں کی تعداد٪ 0.7 بڑھ گئی یعنی٪ 41.9 سے٪ 42.6 ہوگئی۔دوسرے سال کے آخر میں یہ٪42.6 سے٪42.7 مذکورہ بالا جدول سے ہم سالوں کی تعداد اور فی صد کے درمیان ایک مستحکم تعلق نہیں معلوم کر سکتے۔لیکن اضافہ یکساں ہے۔صرف پہلے اور10 ویں سال میں اضافہ بہت زیادہ ہے۔ان قدروں کا درمیانہ ہے 0.7 + 0.1+ 0.2 + 0.2+ 0.;1 + 0.3+0 + 0.1 + 0.1 + 04

یعنی0.22 ٗ آیئے فرض کرتے ہیں کہ داخلہ یکسوئی کے ساتھ 0.22فی صد کی شرح سے بڑھ رہے ہیں

**ریاضیاتی شکل:** ہم نے یہ فرض کیا ہے کہ داخلہ فی صال٪ 0.22 کی شرح سے یکسوئی سے بڑھ رہے ہیں۔

اسلئے پہلے سال میں فی صد داخلہ=41.9+0.22 ٗدوسرے سال میں فی صد داخلہ "= 41.9+ 0.22 + 0.22

=41.9+2x0.22 اور تیسرے سال میں فی صد داخلے 41.9+ 3x 0.22 =41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22

اس لئے xویں سال میں فی صد داخلے=x>,1 کے لئے .41.9 + 0.22x (1)

اب ہمیں اُن سالوں کی تعداد بھی معلوم کرنی ہے جس میں داخلہ٪50 تک پہنچ جائیں گے۔اس لئے ہمیں مساوات میں x کی قدر معلوم کرنی ہوگی 50 = 41 .9 + 0.22x

**قدم2: حل:** (2) کو x کے لئے حل کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = \frac{50-41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$

**قدم3: ترجمانی:** کیوں کہ سالوں کی تعداد ایک صحیح عدد: اس لئے ہم اگلا صحیح عدد سے لیں گے جو37 ہے اس لئے داخلہ کی فی صد تعداد٪ 50 تک 2028=97 +1991 یعنی 2028 تک ہوگی۔

عبارتی سوالات میں ہم اکثر یہیں تک رک جاتے ہیں۔کیوں کہ ہم اصل زندگی کی صورت حال سے دوچار ہیں۔اس لئے ہمیں دیکھنا ہوگا کہ کس حد تک یہ قدر اصل صورتِ حال سے مطابقت رکھتی ہے۔

© NCERT not to be republished

**قدم 4: قانونی توثیق:** آیئے جانچ کرتے ہیں کہ فارمولہ (1) حقیقت سے نزدیک ہے۔ آیئے فارمولہ (1) کا استعمال کرتے ہوئے پہلے سے معلوم سالوں کی قدروں کو معلوم کرتے ہیں اور ان کا موازنہ پہلے سے معلوم قدروں سے ان کا فرق معلوم کر کے کریں گے۔ یہ قدریں جدول A2.4 میں دی گئی ہیں۔

جدول A 2.4

| سال | داخلہ ٪ میں | (1) میں دی گئی قدریں % میں | فرق ٪ میں |
|---|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 41.9 | 0 |
| 1 | 42.6 | 42.12 | 0.48 |
| 2 | 42.7 | 42.34 | 0.36 |
| 3 | 42.9 | 42.56 | 0.34 |
| 4 | 43.1 | 42.78 | 0.32 |
| 5 | 43.2 | 43.00 | 0.20 |
| 6 | 43.5 | 43.22. | 0.28 |
| 7 | 43.5 | 43.44 | 0.06 |
| 8 | 43.6 | 43.66 | -0.06 |
| 9 | 43.7 | 43.88 | -0.18 |
| 10 | 44.1 | 44.10 | 0.00 |

جیسا آپ مندرجہ ذیل جدول میں دیکھ سکتے یں کہ فارمولہ (1) میں دی گئی کچھ قدریں اصل قدروں سے ٪1 سے ٪0.3 یا ٪0.5 تک کم ہیں جس سے فرق 3 سے 5 سال تک بڑھ سکتا ہے۔ کیوں کہ فی سال اضافہ اصل میں ٪1 سے ٪2۔ ہم طے کر سکتے ہیں کہ یہ فرق قابلِ قبول ہے اور ہیں تک رُک جائیں۔ ایسی حالت میں (1) ہمارا ریاضیاتی موڈل ہے۔

فرض کیجیے ہم یہ طے کرتے ہیں کہ غلطی بہت بڑی ہے اور ہمیں اس موڈل کو مزید بہتر بنانا ہے۔ پھر ہمیں قدم 1 تک واپس جانا ہوگا یعنی تشکیل تک اور مساوات (1) کو بدلئے۔ آیئے ایسا کرتے ہیں

© NCERT not to be republished

**قدم 1: تشکیل نو:** ہم اب تک یہی فرض کرتے ہیں کہ قدریں یکسوئی سے ٪ 0.22 بڑھ رہی ہیں۔ لیکن اب ہم غلطی کو کم کرنے کے لئے ایک اصلاحی عنصر کا تعارف کرتے ہیں۔ اس کے لئے ہم تمام غلطیوں کا درمیانہ معلوم کرتے ہیں۔ یہ یہ ہے

$$0.18=\frac{0+0.48+0.36+0.34+0.32+0.2+0.28+0.06-0.06-0.18+0}{10}$$

غلطیوں کا درمیانہ لے کر اس قدر سے ہم اپنے فارمولہ کی تصحیح کرتے ہیں

**نئی ریاضیاتی شکل:** آیئے اب ہم غلطیوں کے درمیانہ کو (1) میں دئے گئے فی صد داخلہ میں جمع کریں۔ اس لئے ہمارا صحیح کیا گیا فارمولہ ہے۔

$x=41.9+0.22x+0.18=42.08+0.22x$ ویں سال میں فی صد داخلہ $n \geq 1$ کے لئے (3) ہم مناسب طریقہ سے مساوات (2) کی ترمیم کریں گے، x کے لئے نئی مساوات ہوگی

$$(4)\ 50=42.08+0.22x$$

**قدم 2: نیا حل:** مساوات (4) کو x کے لئے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$n=\frac{50-42.08}{0.22}=\frac{7.92}{0.22}=36$$

**قدم 3: ترجمانی:** کیوں کہ $n=36$ اس لئے پرائمری اسکول میں لڑکیوں کے داخلہ ٪ 50 تک سال $1991+36=2027$ یعنی 2027 میں پہنچے گے۔

**قدم 4: قانونی توثیق:** ایک بار پھر فارمولہ (3) کے استعمال سے ملی قدروں کا اصل قدروں سے موازنہ کرتے ہیں۔ جدول A2.5 میں موازنہ دیا گیا ہے:

**جدول A2.5**

| سال | داخلہ ٪ میں | (1) سے ملیں قدریں | قدروں میں فرق | (3) سے ملیں قدریں | قدروں میں فرق |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 41.9 | 41.90 | 0 | 41.9 | 0 |
| 1 | 42.6 | 42.12 | 0.48 | 42.3 | 0.3 |
| 2 | 42.7 | 42.34 | 0.36 | 42.52 | 0.18 |

© NCERT not to be republished

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 42.9 | 42.56 | 0.34 | 42.74 | 0.16 |
| 4 | 43.1 | 42.78 | 0.32 | 42.96 | 0.14 |
| 5 | 43.2 | 43.00 | 0.2 | 43.18 | 0.02 |
| 6 | 43.5 | 43.22 | 0.28 | 43.4 | 0.1 |
| 7 | 43.5 | 43.44 | 0.06 | 43.62 | 0.12 |
| 8 | 43.6 | 43.66 | 0.06 | 43.84 | 0.24 |
| 9 | 43.7 | 43.88 | 0.18 | 44.06 | 0.36 |
| 10 | 44.1 | 44.11 | 0 | 44.28 | 0.18 |

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ (3) کے ذریعہ ملی بہت سی قدریں (1) سے ملی قدروں کی بہ نسبت اصل قدروں سے زیادہ قریب ہیں۔اس حالت میں غلطیوں کا درمیانہ 0 ہے۔

اسلئے اپنے عمل کو ہم یہیں روک دیتے ہیں۔اس لئے مساوات (3) ہماری ریاضیاتی شکل ہے جس سے ہمیں سالوں اور کل داخلوں میں لڑکیوں کے فی صد داخلوں کے درمیان ایک ریاضیاتی تعلق ملتا ہے۔ہم نے ایک ریاضیاتی موڈل بنایا ہے جو اضافہ (بڑھت)(growth) کو بیان کرتا ہے۔مذکورہ بالا صورتِ حال میں ہم نے جو طریقہ اپنایا ہے وہ ریاضیاتی موڈلنگ کہلاتا ہے۔ہم پہلے موجود ریاضیاتی اوزاروں سے ریاضیاتی موڈل بنانے کی کوشش کی ہے۔ ہمارے پاس موجود اعداد و شمار (آنکڑوں) سے پیشین گوئیاں کرنے کے لئے اور بھی بہتر ریاضیاتی اوزار ہیں لیکن وہ آپ کے کورس میں نہیں ہیں۔ یہاں یہ موڈل بنانے سے ہمارا مقصد آپ کے لئے موڈلنگ کے طریقہ (یا عمل) کی تشریح کرنا ہے نا کہ اس مرحلہ پر کوئی پیشین گوئی کرنا۔

اب آپ، اب تک کے ہمارے مطالعہ کی تفہیم کی جانچ کرنے کے لئے ایک اصل زندگی کی صورتِ حال کا موڈل بنایئے میں یہاں آپ کے لئے ایک مثال ہے جس کی کوشش کر سکتے ہیں۔

## مشق A2.2

1. مندرجہ ذیل جدول میں 400 میٹر کی دوڑ میں طلائی تمغہ پانے والوں کے وقت جب سے دیئے گئے ہیں جب سے یہ دوڑ

© NCERT not to be republished

اولمپک کھیلوں میں شامل ہے، سالوں کا وقت سے تعلق قائم کرتے ہوئے ایک ریاضیاتی ماڈل بنائیے۔ اور اس کا استعمال اگلے اولمپک کے وقت کا تخمینہ لگانے میں کیجیے۔

جدول A 2.6

| سال | وقت (سیکنڈوں میں) |
|---|---|
| 1964 | 52.01 |
| 1968 | 52.03 |
| 1927 | 51.08 |
| 1976 | 49.28 |
| 1980 | 48.88 |
| 1984 | 48.83 |
| 1988 | 48.65 |
| 1992 | 48.83 |
| 1996 | 48.25 |
| 2000 | 49.11 |
| 2004 | 49.41 |

## A 2.4 ماڈلنگ کا طریقہ (عمل) اس کے فائدے اور بندشیں
## (The Process of Modelling, its Advantages & Limitations)

آیئے اب ہم اپنے مطالعہ کو ریاضیاتی ماڈلنگ کے مذکورہ بالا مثالوں میں دکھائے گئے پہلوؤں کو اُجاگر کر کے اپنے مطالعہ کو اختتام تک پہنچاتے ہیں۔ پچھلے سیکشن کے پس منظر کے ساتھ اب ہم اس حالت میں ہیں کہ ماڈلنگ میں شامل اقدام پر نظر ثانی کر سکتے ہیں۔

© NCERT not to be republished

**قدم 1: تشکیل:** آپ نے سیکشن A 2.2 کی مثال 1 کی تشکیل والے حصّہ اور سیکشن A2.3 میں مطالعہ کئے گئے موڈل کی تشکیل والے حصہ کے درمیان فرق نوٹ کیا ہوگا۔ مثال 1 میں تمام اطلاعات فوراً استعمال ہونے والی ہیں جب کہ A2.3 دئے گئے موڈل میں ایسا نہیں ہے۔ مزید اس کی ریاضیاتی شکل معلوم کرنے میں ہمیں کچھ وقت لگتا ہے۔ ہم نے اپنے پہلے فارمولہ کی جانچ کی اور یہ پایا کہ یہ اتنا اچھا نہیں ہے جتنا دوسرا ہے۔ عمومی طور پر یہ اکثر صحیح ہوتا ہے۔ یعنی جب اصل زندگی کی صورتِ حال کا موڈل بنانے کی کوشش ہوتی ہے۔ پہلے موڈل کو اکثر ترمیم کی ضرورت ہوتی ہے۔ جب ہم ایک اصل زندگی کے مسئلہ کو حل کرتے ہیں تو تشکیل میں اچھا خاصہ وقت درکار رہتا ہے۔ مثال کے طور پر نیوٹن کے حرکت کے تین قوانین جو حرکت کی ریاضیاتی شکل ہیں، اتنے آسان ہیں کہ آسانی سے بیان کئے جاسکیں۔ لیکن نیوٹن ان قوانین تک ایک کثیر اعدو شمار اور پچھلے سائنسدانوں کا مطالعہ کر کے پہنچا ہے۔

تشکیل میں مندرجہ ذیل اقدام شامل ہے:

(i) **مسئلہ کو بیان کرنا:** اکثر مسئلہ کو مبہم طریقہ سے بیان کیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر سب سے بڑا مقصد یہ پکّا کرنا ہے کہ لڑکے اور لڑکیوں کا داخلہ برابر ہو۔ اس کا مطلب ہے کہ اسکول جانے والی عمر کے لڑکوں کا 50٪ اور اسکول جانے والی عمر کی لڑکیوں کا 50٪ داخلہ ہو۔ یا دوسرا طریقہ یہ پکا کرنا کہ 50٪ اسکول جانے وال بچے لڑکیاں ہوں۔ ہم نے اپنے مسئلہ میں دوسرا طریقہ استعمال کیا ہے۔

(ii) **متعلقہ عناصر کی شناخت:** یہ طے کرنا کہ ہمارے مسئلہ کے لئے کونسی مقداریں اور تعلق اہم ہیں اور کون سے اتنے غیر اہم کہ ان کو نظر انداز کیا جاسکے۔ مثال کے طور پر ہماری پرائمری اسکول کے داخلوں کے مسئلہ میں پچھلے سال میں داخل کی گئی فیصد لڑکیاں اس سال داخل کی گئی لڑکیوں کی تعداد پر اثر انداز ہوتی ہیں۔ یہ اس لئے ہوتا ہے کہ جتنی زیادہ سے زیادہ لڑکیاں اسکول میں داخلہ لیتی ہیں بہت سے والدین بھی یہ محسوس کریں گے ان کو اپنی بیٹوں کو بھی اسکول میں داخلہ دلوانہ چاہیے لیکن ہم نے اس عنصر کو نظر انداز کر دیا۔ کیوں کہ اس کی اہمیت جب ہوتی ہے جب داخلہ ایک خاص فی صد سے زیادہ ہو جائے۔ مزید اس عنصر کو شامل کر کے ہم اپنے موڈل کو اور زیادہ پیچیدہ بناسکتے ہیں۔

(iii) **ریاضیاتی شکل:** اب فرض کیجیے کہ ہم پر یہ بات واضح ہوگئی ہے کہ مسئلہ کیا ہے اور اس کے کون سے پہلو دوسروں کی بہ نسبت زیادہ متعلق ہیں۔ تب ہمیں اس میں شامل پہلوؤں کے درمیان مساوات کا گراف اکوئی دوسری مناسب شکل

(خلیہ) کی شکل میں تعلق معلوم کرنا ہوگا۔ اگر یہ ایک مساوات ہوگی تب ہر اہم پہلو کو ہماری ریاضیاتی مساوات میں ایک متغیر سے ظاہر کرنا چاہیے۔

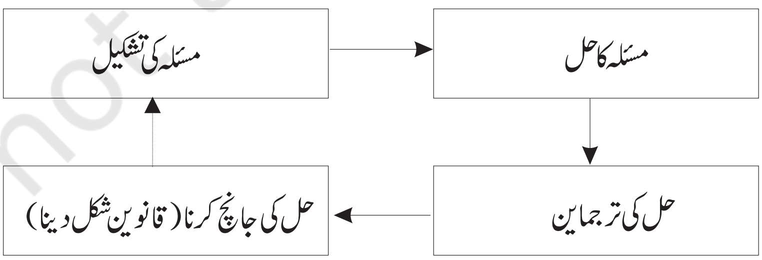
**قدم 2: حل معلوم کرنا:** ریاضیاتی تشکیل حل نہیں دیتی ہمیں اس کی معادل ریاضیات مسئلہ کو حل کرنا ہوگا یہ وہ جگہ ہے جہاں آپ اپنے ریاضی کے علم کو مفید پائیں گے۔

**قدم 3: حل کی ترجمانی کرنا:** ریاضیاتی حل موڈل میں موجود متغیروں کی قدر یا قدریں ہوتی ہیں ہم واپس اصل زندگی کے مسئلہ کی طرف جاتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ مسئلہ میں ان قدروں کا کیا مطلب ہے۔

**قدم 4: حل کی قانونی توثیق کرنا:** جیسا ہم نے A2.3 میں دیکھا کہ حل نکالنے کے بعد ہم یہ جانچ کرتے ہیں کہ آیا حل حقیقت سے مطابقت رکھتا ہے اگر ہاں تو ریاضیاتی موڈل قابل قبول ہے اگر نہیں تو ہم واپس دوبارہ تشکیل کے قدم کی طرف جاتے ہیں اور ان سے موڈل کو بہتر بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔

اس عمل میں یہ قدم عبارتی سوالوں کا حل کرنا اور ریاضیاتی موڈلنگ کے درمیان نمایاں فرق ہے۔ یہ موڈلنگ میں ایک بہت اہم قدم ہے جو عبارتی سوالوں میں نہیں ہوتا۔ بے شک کچھ اصل زندگی کے مسئلوں میں یہ ممکن ہے کہ اپنے جواب کو ہمیں قانونی شکل دینے کی ضرورت نہیں ہوتی کیوں کہ مسئلہ بہت آسان ہوتا ہے اور ہم صحیح طریقہ سے صحیح حل حاصل کر لیتے ہیں۔ اور ایسا A2.3 کے پہلے موڈل میں ہم نے غور کیا تھا۔ ہم نے نیچے شکل A2.2 میں اس ترتیب کا خلاصہ دیا ہے۔ ہمیں ریاضیاتی موڈلنگ کے اقدام ایک ایک کر کے آتے ہیں۔ قانونی شکل کے قدم سے تشکیل کے قدم کی حرکت کو نقطہ وار تیر سے دکھایا گیا ہے۔ یہ اس لئے کہ یہ ضروری نہیں کہ اس قدم کو دوبارہ استعمال کیا جائے۔

اب جب کہ آپ نے ریاضیاتی موڈلنگ میں شامل تمام مرحلوں کا مطالعہ کر لیا ہے۔ آیئے اب اس کے کچھ پہلوؤں کا مطالعہ کریں۔




شکل A2.2

ریاضیاتی موڈلنگ کا مقصد ہے۔ اصل زندگی سے متعلق کچھ مفید اطلاعات لےکران کو ریاضیاتی مسائل میں بدلنا' یہ خاص طور سے اُس وقت زیادہ مفید ہوتی ہے جب دوسرے ذرائع جیسے درست مشاہدہ یا تجربہ کے ذریعہ اطلاعات حاصل کرنا ممکن نہ ہو یا بہت مہنگا ہو۔

آپ اس بات پر بھی متحیر ہوں گے کہ ہمیں ریاضیاتی موڈلنگ کی ضرورت کیوں ہوتی ہے؟ آیئے موڈلنگ کے کچھ فائدوں پر غور کرتے ہیں۔ فرض کیجیے ہم تاج محل پر متھرا ریفائنری (Refinery) کے نکلنے والے اخراج سے ہونے والی تباہی کا مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم سیدھے تاج محل پر تجربہ نہیں کرنے لگیں گے کیوں کہ یہ محفوظ نہیں ہوگا۔ بے شک ہم اس کے موڈل کا استعمال کر سکتے ہیں۔ لیکن اس کے لئے ہمیں مخصوص قسم کی سہولیات کی ضرورت ہوتی ہے جو کافی مہنگی ہو سکتی ہے۔ اس لئے یہاں پر ریاضیاتی موڈلنگ بہت زیادہ مفید ثابت ہوتی ہے۔

فرض کیجیے ہم جاننا چاہتے ہیں کہ 5 سال بعد ہمیں کتنے پرائمری اسکولوں کی ضرورت ہوگی۔ تب ہم اس مسئلہ کو صرف ریاضیاتی موڈلنگ سے ہی حل کر سکتے ہیں۔ اسی طرح سے صرف موڈلنگ کے ہی ذریعہ سائنسداں بہت عجیب وغریب چیزوں کے وجود کی تشریح کرنے کے قابل ہوئے۔

A2.3 میں آپ نے دیکھا کہ بہتر طریقوں سے ہم دوسری مثالوں کے جواب کو بہتر بنانے کی کوشش کر سکتے تھے لیکن ہم وہیں رُک گئے کیوں کہ ہمارے پاس ریاضیاتی اوزار نہیں تھے اور ایسا اصل زندگی میں بھی ہوتا ہے۔

اکثر ہم ریاضیاتی اوزار دستیاب نہ ہونے کی وجہ سے تقریباً جوابات سے بھی مطمئن ہو جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر موڈلنگ میں استعمال ہوئی موڈل مساوات اتنی پیچیدہ ہوتی ہیں کہ انکا صحیح حل نکالنے کے لئے ریاضیاتی اوزار دستیاب نہیں ہوئے۔

آپ حیرت کریں گے کہ کس حد تک ہم اپنے موڈل کو بہتر بنانے کی کوشش کر سکتے ہیں جب ہم ایسا کرتے ہیں ان کو بہتر بنانے کے لئے ہم عام طور پر اور بھی بہت سی باتوں کو زیرِ غور لاتے ہیں۔ جب ہم ایسا کرتے ہیں تب ہم ریاضیاتی مساوات میں اور متغیر جمع کرتے ہیں۔ ایک موڈل بہت سادہ ہونا چاہیے تاکہ اس کو آسانی سے استعمال کیا جا سکے۔ ایک اچھے موڈل میں دو باتیں ضروری ہونی چاہئیں۔

1. درستگی یعنی حقیقت سے یہ کتنا قریب ہے۔
2. جس کا استعمال آسانی سے کیا جا سکے۔

مثال کے طور پر نیوٹن کے حرکت کے قوانین بہت آسان ہیں لیکن اتنے طاقت ور بھی ہیں کہ بہت سی فزیکل صورت حال کو موڈل کی شکل دے سکیں۔

اس لئے کیا ریاضیاتی موڈلنگ تمام مسائل کا جواب ہے؟ نہیں۔ اس کی کچھ بندشیں بھی ہیں۔ اس لئے ہمں ہمیشہ یہ ذہن میں رکھنا چاہئے کہ موڈل اصل زندگی کے مسئلہ کا اختصار ہے ور دونوں ایک ہی چیز نہیں ہیں یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے کسی ملک کا نقشہ جو اس کے فزیکل فیچر کے بارے میں بتاتا ہے اور وہ مسلک خود کے درمیان فرق ہوتا ہے۔ ہم اس نقشہ سے سطح سمندر سے کسی جگہ کی اونچائی کا تو پتہ لگا سکتے ہیں لیکن اس سے ہم لوگوں کی خصوصیت کے بارے میں اندازہ نہیں لگا سکتے۔

اس لئے ہمیں موڈل کو اس مقصد کے لئے استعمال کرنا چاہئے جس کے لئے یہ بتایا گیا ہے۔ اور ان باتوں کو بھی یاد رکھنا چاہئے جو اس کو بناتے وقت ہم نے نظر انداز کر دی تھیں ہم اس موڈل کا اسعمال ان حدود میں کریں گے جہاں اس کا اطلاق ہوتا ہے۔ اگلی کلاسوں میں ہم اس پہلو پر تھوڑا زیادہ مطالعہ کریں گے۔

## مشق A2.3

1. نصابی کتابوں میں حل کئے گئے عبارتی سوالات ریاضیاتی موڈلنگ سے کس طرح مختلف ہیں؟
2. فرض کیجیے اب چار سڑکوں کے ٹریفک جنکشن پر گاڑیوں کے انتظار کرنے کے وقت کو کم سے کم کرنا چاہتے ہیں تو مندرجہ ذیل میں کونسی باتیں اہم ہیں اور کون سی نہیں؟
   (i) پٹرول کی قیمت۔
   (ii) وہ شرح جس سے گاڑیاں چار مختلف سڑکوں پر پہنچتی ہیں۔
   (iii) ہلکی چلنے والی گاڑیوں جیسے سائیکل رکشا اور تیز چلنے والی گاڑیوں جیسے کاریں اور موٹر سائیکلوں کے درمیان تناسب۔

## A2.5 خلاصہ (Summary)

اس یونٹ میں آپ نے مندرجہ ذیل چیزوں کا مطالعہ کیا۔

1. عبارتی سوالوں کو حل کرنے میں شامل اقدام پر نظرِ ثانی۔
2. کچھ ریاضیاتی موڈل بنائے۔

© NCERT not to be republished

3. ریاضیاتی ماڈلنگ میں شامل اقدام، جو ذیل کے باکس میں دئے گئے ہیں، کا مطالعہ کیا:

1. تشکیل
(i) سوال کو بیان کرنا
(ii) متعلقہ عامل کی شناخت
(iii) ریاضیاتی شکل
2. حل معلوم کرنا۔
3. اصل زندگی کے مسئلہ کے سیاق میں حل کی ترجمانی کرنا۔
4. اس بات کی جانچ کرنا کہ موڈل کس حد تک مطالعہ کئے گئے مسئلہ کی صحیح نمائندگی کرتا ہے۔

4. ریاضیاتی ماڈلنگ کا مقصد فائدہ اور بندشیں (Limitations)

© NCERT not to be republished