



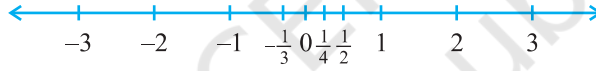
4915CH01

باب 1

عددی نظام (NUMBER SYSTEM)

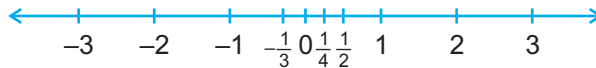
1.1 تعارف: (Introduction)

پچھلی جماعتوں میں آپ سیکھ چکے ہیں کہ عددی خط اور اس پر مختلف قسم کے اعداد کا اظہار کس طرح کرتے ہیں (شکل 1.1 کو دیکھیے)۔



شکل: 1.1: عددی خط

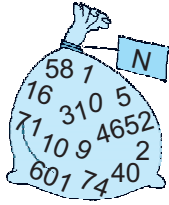
تصور کیجیے کہ آپ صفر سے شروع کرتے ہوئے اس عددی خط کے ساتھ مثبت سمت میں چلتے چلے جاتے ہیں۔ جہاں تک آپ کی آنکھ دیکھ سکتی ہے وہاں تک صرف اعداد، اعداد اور اعداد ہی نظر آتے ہیں۔



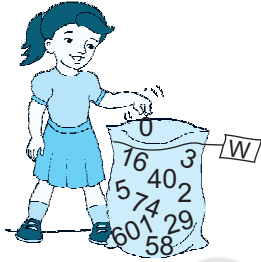
شکل: 1.2

اب فرض کیجیے کہ آپ عددی خط کے ساتھ چلنا شروع کرتے ہیں اور کچھ اعداد اکٹھا کرتے ہیں۔ ان اعداد کو جمع کرنے کے لیے ایک تھیلہ تیار رکھیے۔

آپ صرف طبعی اعداد جیسے 1، 2، 3 وغیرہ سے یہ عمل شروع کر سکتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ یہ فہرست ہمیشہ چلتی رہے گی۔ (یہ صحیح کیوں ہے؟) اس طرح سے اب آپ کے تھیلے میں لامحدود فطری اعداد ہیں۔ یاد کیجیے کہ ہم اس مجموعہ کو علامت N سے ظاہر کرتے ہیں۔



اب آپ واپس آئیے اور صفر کو اٹھائیے اور اس کو تھیلے میں رکھیے۔
اب آپ کے پاس مکمل اعداد کا مجموعہ ہے جس کو ہم علامت W سے ظاہر کرتے ہیں۔

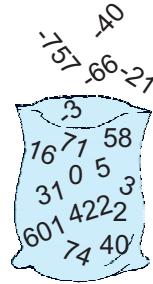


اب آپ کے سامنے بہت سے منفی صحیح اعداد ہیں۔ تمام صحیح اعداد کو آپ اپنے تھیلے میں رکھیں۔ آپ کا نیا مجموعہ کون سا ہے؟ یاد کیجیے اس مجموعہ کو صحیح اعداد کہتے ہیں اور اس کو علامت Z سے ظاہر کرتے ہیں۔

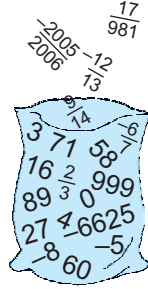


Z ایک جرمن لفظ Zahlen سے لیا گیا ہے جس کا مطلب گنتی کرنا اور "Zahl" کا مطلب عدد۔

Z ہی کیوں؟



کیا عددی خط پر اب بھی کچھ عدد باقی بچے ہیں؟ ہاں! اعداد جیسے $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ یا $\frac{-2005}{2006}$ وغیرہ۔ اگر آپ ایسے تمام اعداد کو بھی تھیلے میں رکھیں تو اب یہ ناطق اعداد (Rational Numbers) کا مجموعہ ہو جائے گا۔ ناطق اعداد کے مجموعہ کو Q سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لفظ ناطق، لفظ نسبت (Ratio) سے لیا گیا ہے اور Q لفظ خارج قسمت (Quotient) سے لیا گیا ہے۔



آپ ناطق اعداد کی تعریف کو دہرا سکتے ہیں:

ایک عدد 'r'، ناطق عدد کہلاتا ہے، اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ۔
(ہم کیوں اس بات پر زور دیتے ہیں کہ $q \neq 0$ ؟)

یہ بات نوٹ کیجیے کہ اب تھیلے میں موجود تمام اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے، جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ۔ مثال کے طور پر 25۔ کو ہم $\frac{-25}{1}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $p = -25$ اور $q = 1$ ہے۔ اس لیے ناطق اعداد میں فطری اعداد، مکمل اعداد اور صحیح اعداد بھی شامل ہیں۔

آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ ناطق اعداد کا $\frac{p}{q}$ کی شکل میں اظہار منفرد نہیں ہے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ۔
مثال کے طور پر $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ اور یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ یہ معادل (Equivalent) ناطق اعداد ہیں۔
حالانکہ جب ہم کہتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ ایک ناطق عدد ہے یا جب ہم $\frac{p}{q}$ کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں تو ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ $q \neq 0$ اور p اور q میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے (یعنی p اور q co-prime ہیں)۔ اس لیے عددی خط پر $\frac{1}{2}$ کی لامحدود معادل کسور (Fractions) میں سے ہم $\frac{1}{2}$ کو چنتے ہیں جو ان تمام کی نمائندگی کرتا ہے۔

آپ آئیے اب ہم مختلف قسم کے اعداد کی کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں جن کو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

مثال 1: کیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجوہات دیجیے:

(i) ہر مکمل عدد ایک فطری عدد ہے۔

(ii) ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد ہے۔

(iii) ہر ناطق عدد ایک صحیح عدد ہے۔

حل: (i) غلط، کیونکہ صفر ایک مکمل عدد ہے، طبعی عدد نہیں ہے۔

(ii) صحیح، کیونکہ ہر صحیح عدد m کو $\frac{m}{1}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اس لیے یہ ایک ناطق عدد ہے

(iii) غلط، کیونکہ $\frac{3}{5}$ صحیح عدد نہیں ہے۔

مثال 2: 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

اس سوال کو ہم کم از کم دو طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

حل 1: یاد کیجیے کہ r اور s کے درمیان ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم r اور s کو جمع کر کے 2 سے تقسیم کرتے ہیں یعنی

$$\frac{r+s}{2} \text{ اور } r \text{ کے درمیان ایک ناطق عدد ہے۔ اس لیے } \frac{3}{2}, 1 \text{ اور } 2 \text{ کے درمیان ایک عدد ہے۔ اس طرح سے آگے بڑھتے}$$

$$\text{ہوئے آپ 1 اور 2 کے درمیان مزید چار ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ چار اعداد ہیں } \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8} \text{ اور } \frac{7}{4}$$

حل 2: دوسرے طریقے کے مطابق آپ ایک ہی مرحلہ میں تمام پانچ ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں کیونکہ ہمیں پانچ ہی ناطق

اعداد معلوم کرنے ہیں۔ ہم 1 اور 2 کو ایک ایسے ناطق عدد کی شکل میں لکھتے ہیں جس کا نسب نما $1+5$ یعنی $\frac{6}{6} = 1$ اور

$$\frac{12}{6} = 2 \text{۔ آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ تمام اعداد } \frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6} \text{ اور } \frac{11}{6} \text{ کے درمیان ناطق اعداد ہیں۔ اس طرح سے}$$

$$\text{پانچ اعداد ہیں } \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \text{ اور } \frac{11}{6} \text{۔}$$

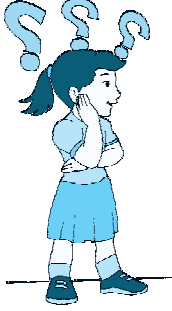
ریمارک: نوٹ کیجیے کہ مثال 2 میں آپ سے 1 اور 2 کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کرنے کو کہا گیا۔ آپ نے یہ حقیقت

سمجھ لی ہوگی کہ 1 اور 2 کے درمیان لامحدود ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ عام طور پر دیے گئے دو اعداد کے درمیان لامحدود ناطق

اعداد ہوتے ہیں۔

آئیے ایک بار پھر عددی خط پر غور کرتے ہیں۔ کیا آپ تمام اعداد جن چکے ہیں؟ ابھی تک نہیں۔ بلکہ حقیقت یہ ہے کہ اب

بھی عددی خط پر لامحدود اعداد باقی ہیں۔ جتنے بھی اعداد آپ نے چنے ہیں ان کے درمیان خالی جگہ ہے اور صرف ایک اور دو



نہیں بلکہ لامحدود اور حیرت انگیز بات یہ ہے کہ اس طرح کی دو خالی جگہوں کے درمیان بھی لامحدود اعداد موجود ہیں۔

تو ہمارے سامنے ابھی بھی مندرجہ ذیل سوالات ہیں:

1. عددی خط پر باقی اعداد کیا کہلاتے ہیں؟
2. ہم ان کی شناخت کیسے کریں گے؟ یعنی ہم ان کو ناطق اعداد سے کیسے الگ سمجھیں گے۔

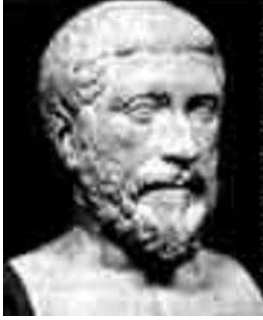
ان سوالوں کے جواب ہم اگلے سیکشن میں پائیں گے۔

مشق 1.1

1. کیا صفر ایک ناطق عدد ہے؟ کیا آپ اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ؟
2. 3 اور 4 کے درمیان چھ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
3. $\frac{3}{5}$ اور $\frac{4}{5}$ کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے؟
4. بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط؟ اپنے جوابات کی وجہ بتائیے۔
 - (i) ہر طبعی عدد ایک مکمل عدد ہے۔
 - (ii) ہر صحیح عدد ایک مکمل عدد ہے۔
 - (iii) ہر ناطق عدد ایک مکمل عدد ہے۔

1.2 غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

پچھلے سیکشن میں ہم نے دیکھا کہ عددی خط پر ایسے بھی اعداد ہیں جو ناطق نہیں ہیں۔ اس سیکشن میں ہم ان اعداد کی تفتیش کریں گے۔ ابھی تک آپ نے جتنے بھی اعداد دیکھے وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل کے تھے جہاں p اور q صحیح اعداد اور $q \neq 0$ ۔ اس لیے آپ یہ پوچھ سکتے ہیں کہ کیا ایسے بھی اعداد ہیں جو اس شکل میں نہیں ہیں؟ یقیناً ایسے اعداد ہیں۔ آئیے اب ہم ان اعداد کی باضابطہ طور پر تعریف بیان کرتے ہیں۔



پیتھاگورس
(569BC–479BC)

شکل 1.3

یونان میں مشہور ریاضی داں پیتھاگورس (Pythagoras) کے پیروکاروں نے سب سے پہلے 400 ق-م میں ان اعداد کی دریافت کی جو ناطق نہیں تھے۔ ان اعداد کو غیر ناطق اعداد کہا جاتا ہے۔ کیونکہ ان اعداد کو دو صحیح اعداد کی نسبت میں نہیں لکھا جاسکتا۔ Hippasus کے ذرائع دریافت غیر ناطق اعداد سے متعلق کافی عجیب و غریب باتیں منسوب ہیں۔ Hippasus کا خاتمہ یا تو یہ پتہ لگانے کی وجہ سے کہ $\sqrt{2}$ کہ ایک غیر ناطق عدد ہے یا پھر پیتھاگورس کے قبیلے کے باہر کے لوگوں پر یہ راز ظاہر کرنے کی وجہ سے بڑے افسوس ناک انداز میں ہوا۔

ایک عدد غیر ناطق (Irrational) کہلاتا ہے اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جاسکے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

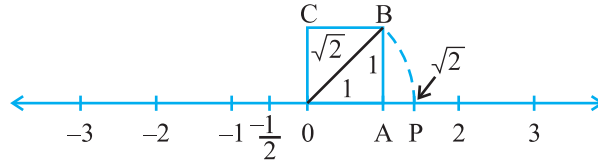
آپ پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ ناطق اعداد لامحدود ہیں۔ اب یہ بات بھی مصدقہ ہے کہ غیر ناطق اعداد بھی لامحدود ہیں۔ کچھ مثالیں ہیں:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$$

ریمارک: یاد کیجیے کہ ہم جب بھی علامت $\sqrt{\quad}$ کا استعمال کرتے ہیں تو اس سے ہمارا مطلب ہوتا ہے عدد کا مثبت جزر المربع۔ اس لیے $\sqrt{4} = 2$ جب کہ دونوں 2 اور -2 عدد کے 4 جزر ہیں۔

مذکورہ بالا کچھ ناطق اعداد سے آپ واقف ہیں۔ مثال کے طور پر مندرجہ بالا جزر المربع اور عدد π آپ پہلے ہی سے واقف ہیں۔

پیتھاگورس کے پیروکاروں نے ثابت کیا کہ $\sqrt{2}$ غیر ناطق ہے۔ بعد میں تقریباً 524 ق-م تھیودورس (Theodorus) نے دکھایا کہ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ اور $\sqrt{17}$ بھی غیر ناطق ہیں۔ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ وغیرہ کی غیر ناطقیت کا ثبوت ہم 10 ویں جماعت میں پڑھیں گے۔ جہاں تک π کا سوال ہے تو اس کے بارے میں جانکاری ہزاروں سال سے تھی لیکن اس کا ثبوت 1700 کے آخر میں Lambert اور

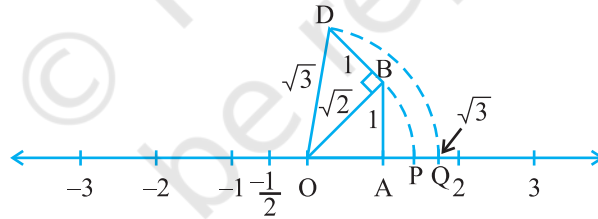


شکل: 1.7

ہم نے ابھی دیکھا کہ $OB = \sqrt{2}$ ایک پرکار کو استعمال کرتے ہوئے O کو خط مرکز مان کر اور OB نصف قطر لے کر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ P پر قطع کرے۔ تب P عددی خط پر $\sqrt{2}$ ظاہر کرتا ہے۔

مثال 4: $\sqrt{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

حل: آئیے شکل 1.7 کی طرف واپس آتے ہیں۔



شکل: 1.8

OB پر اکائی لمبائی کا عمود BD کھینچیں (جیسا کہ شکل 1.8 میں دکھایا گیا ہے)۔ پھر پتھا گورس کے مسئلہ کے مطابق ہم دیکھتے

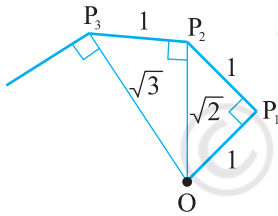
$$OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

پرکار کا استعمال کرتے ہوئے O کو مرکز مان کر اور نصف قطر OD لیکر ایک قوس بنائیں جو عددی خط کو نقطہ Q پر قطع کرتا ہے۔ تب نقطہ Q $\sqrt{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

اس طرح سے ہم کسی مثبت صحیح عدد n کے لیے $\sqrt{n}$ کو عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں جب کہ $\sqrt{n-1}$ کو ظاہر کیا جا چکا ہو۔

مشق 1.2

- بیان کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جواب کی دلیل بھی پیش کیجئے۔
 - ہر غیر ناطق عدد ایک حقیقی عدد ہے۔
 - عددی خط پر ہر نقطہ $\sqrt{m}$ کی شکل کا ہے جہاں m ایک فطری عدد ہے۔
 - ہر حقیقی عدد ایک غیر ناطق عدد ہے
- کیا تمام مثبت صحیح اعداد کے جزر المربع غیر ناطق ہیں؟ اگر نہیں تو ایک ایسے عدد کے جزر المربع کی مثال دیجئے جو ناطق عدد ہے۔
- دکھائیے کہ $\sqrt{5}$ کو کس طرح سے عددی خط پر ظاہر کر سکتے ہیں۔
- گلاس میں کیا جانے والا مشغلہ (جزر المربع کا اسپائرل (Spiral) بنانا): کاغذ کی بڑی شیٹ لیجئے اور اس پر مندرجہ ذیل طریقہ سے جزر المربع Spiral بنائیے۔ نقطہ O سے شروع کیجئے اور اکائی لمبائی کا قطعہ OP_1 بنائیے، P_1P_2 کے عمودی قطعہ خط OP_1 بنائیے (شکل 1.9 دیکھیے) اب P_2P_3 کے عمودی ایک قطعہ OP_2 بنائیے۔ پھر OP_3 کے عمودی P_3P_4 بنائیے۔ اس طرح سے جاری رکھتے ہوئے $P_{n-1}P_n$ کے عمودی اکائی لمبائی کا ایک قطعہ خط OP_{n-1} حاصل ہوتا ہے۔ اس طریقہ سے آپ نے نقاط $P_2, P_3, \dots, P_n$ کی تخلیق کی اور ان کو ایک خوبصورت Spiral سے ملا دیا جو $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل: 1.9 جزر المربع بنانا

1.3 حقیقی اعداد اور ان کا عشری پھیلاؤ

(Real Numbers and their Decimal Expansion)

اس سیکشن میں ہم ایک مختلف نقطہ نظر سے ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مطالعہ کریں گے۔ ہم حقیقی اعداد کے عشری پھیلاؤ پر غور کریں گے اور دیکھیں گے کہ کیا ہم ان کو ناطق اور غیر ناطق اعداد میں فرق معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔ ہم یہ بھی بیان

کریں گے کہ ان کے عشری پھیلاؤ کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی اعداد کو عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جاسکتا ہے کیونکہ ناطق اعداد سے ہماری واقفیت زیادہ ہے، اس لیے ان سے شروع کرتے ہیں۔ آئیے تین مثال لیتے ہیں: $\frac{1}{7}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $\frac{10}{3}$

باقی (Remainders) پر خاص توجہ دیں اور دیکھیں کہ کیا آپ کوئی نمونہ معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 5: عشری پھیلاؤ معلوم کریں $\frac{1}{7}$ اور $\frac{7}{8}$ ، $\frac{10}{3}$

حل:

	3.333...
3	10
	9
	10
	9
	10
	9
	10
	9
	1

	0.875
8	7.0
	64
	60
	56
	40
	40
	0

	0.142857...
7	1.0
	7
	30
	28
	20
	14
	60
	56
	40
	35
	50
	49
	1

باقی: 1، 1، 1، 1، 1، ...
قاسم: 3

باقی: 6، 4، 0
قاسم: 8

باقی: 3، 2، 6، 4، 5، 1، ...
قاسم: 7

آپ کیا نوٹ کرتے ہیں؟ آپ کم سے کم تین باتیں نوٹ کرتے ہیں:

(i) باقی یا تو صفر ہو جاتا ہے یا ایک خاص مرحلہ کے بعد اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔

(ii) باقیوں میں آنے والے اعداد قاسم سے کم ہیں۔

($\frac{10}{3}$ میں ایک عدد اپنے آپ کو دہراتا ہے اور قاسم 3 ہے اور $\frac{1}{7}$ میں باقیوں کے ایسے چھ اندراجات 142857 ہیں اور قاسم 7 ہے۔)

(iii) اگر باقی اپنے آپ کو دہراتے ہیں تب ہمیں خارج قسمت کے ہندسوں میں ایک تکراری بلاک حاصل ہوتا ہے۔

($\frac{10}{3}$ کے لیے خارج قسمت میں 3 کی تکرار ہوتی ہے اور $\frac{1}{7}$ کے لیے ہمیں خارج قسمت میں 142857 کا تکراری بلاک ملتا ہے۔)

حالانکہ یہ پیٹرن مذکورہ بالا کچھ مثالوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے لیکن یہ تمام ناطق اعداد جو $(q \neq 0)$ کی شکل میں ہوں، اس کے لیے درست ہے۔ p کو q سے تقسیم کرنے میں دو خاص باتیں ہوتی ہیں۔ یا تو باقی صفر ہو جاتا ہے یا کبھی صفر نہیں ہوتا اور ہمیں باقیوں کی تکرار ملتی ہے۔ اس لیے آئیے ہر ایک حالت کو الگ الگ دیکھتے ہیں۔

حالت (i): باقی جب صفر ہو جاتا ہے

$\frac{7}{8}$ کی مثال میں ہم پاتے ہیں کچھ اقدام کے بعد باقی صفر ہو جاتا ہے اور $\frac{7}{8}$ کا عشری پھیلاؤ 0.875 دوسری مثالوں کا عشری پھیلاؤ ہے۔

$\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$ ان تمام حالات میں محدود اقدام کے بعد عشری پھیلاؤ ختم ہو جاتا ہے۔ اس قسم کے عشری پھیلاؤ کو ہم مختتم کہتے ہیں۔

حالت (ii): جب باقی کبھی صفر نہیں ہوتا

$\frac{10}{3}$ اور $\frac{1}{7}$ کی مثالوں میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ ایک خاص مرحلہ کے بعد باقی اپنے آپ کو دہرانے لگتا ہے۔ ان سے عشری پھیلاؤ غیر مختتم ہو جاتا ہے۔ دوسرے لفظوں میں خارج قسمت میں ہمارے پاس ہندسوں کا ایک تکراری بلاک آ جاتا ہے۔ ہم اس پھیلاؤ کو غیر مختتم تکراری کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$\frac{10}{3} = 3.3333$ اور $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ عام طریقہ سے $\frac{10}{3}$ کے خارج قسمت میں 3 کی

تکرار کو ہم 3.3 لکھتے ہیں۔ اسی طرح سے $\frac{1}{7}$ کے خارج قسمت میں ہندسوں 142897 کی تکرار ہوتی ہے اس لیے ہم $\frac{1}{7}$ کو اس طرح لکھتے ہیں $0.\overline{142857}$ جہاں اوپر کھینچا گیا قطعہ خط (بار) ہندسوں کے بلاک کی تکرار کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید 3.57272 کو ہم $3.\overline{572}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح سے یہ تمام مثالیں ہم کو ایک غیر مختتم تکراری عشری پھیلاؤ دیتی ہیں۔

اس طرح سے ہم دیکھتے ہیں کہ ناطق اعداد کا عشری پھیلاؤ دو قسم کا ہوتا ہے یا تو مختتم یا غیر مختتم تکراری۔ اب فرض کیجیے یا دوسرے لفظوں میں عددی خط پر آپ کے چلنے سے آپ کا واسطہ ایسے اعداد جیسے 3.142678 سے پڑتا ہے جس کا عشری پھیلاؤ مختتم ہے یا عدد جیسے 1.272727 یعنی $1.\overline{27}$ جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہے۔ کیا آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ناطق عدد ہے؟ اس کا جواب ہے ہاں!

ہم اس کو ثابت نہیں کریں گے لیکن اس کی وضاحت کچھ مثالوں سے کریں گے۔ مختتم حالتیں آسان ہیں۔

مثال 6: دکھائیے کہ 3.142678 ایک ناطق عدد ہے۔ دوسرے لفظوں میں 3.142678 کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیجیے

جب کہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

حل: ہمارے پاس ہے $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ اس لئے یہ ایک ناطق عدد ہے۔ عدد اب ایسی حالت پر غور

کرتے ہیں جب عشری پھیلاؤ غیر مختتم تکراری ہو۔

مثال 7: دکھائیے کہ $0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں کیا اور

$q \neq 0$

حل: کیونکہ ہم نہیں جانتے کہ 0.3 کیا ہے۔ آئیے اس کو 'x' مانتے ہیں۔

$$x = 0.3333\ldots$$

یہی وہ مرحلہ ہے جہاں ہمیں ٹرک (Trick) استعمال کرنی ہے۔ غور کیجیے۔

$$10x = 10 \times (0.333\ldots) = 3.333\ldots$$

$$x = 0.3333\ldots \quad 3.3333\ldots = 3 + x$$

اب

$$10x = 3 + x$$

اس لیے

x کے لیے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$9x = 3 \quad \text{یعنی} \quad x = \frac{1}{3}$$

مثال 8: دکھائیے کہ $1.272727... = 1.\overline{27}$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور

$$q \neq 0$$

حل: مان لیجیے $x = 1.272727...$ کیونکہ دو ہندسوں کی تکرار ہو رہی ہے اس لیے ہم x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 127.2727...$$

$$100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$$

$$100x - x = 126, \quad 99x = 126$$

$$x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$$

تو
اس لیے

یعنی

$$\frac{14}{11} = 1.\overline{27} \quad \text{اس کے معکوس سے آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ}$$

مثال 9: دکھائیے کہ $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ کا اظہار $\frac{p}{q}$ کی شکل میں کیا جاسکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد

$$q \neq 0$$

حل: مان لیجیے $x = 0.2\overline{35}$ یہاں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ 2 کی تکرار نہیں ہوتی بلکہ 35 کی تکرار ہوتی ہے چونکہ 2 ہندسوں کی تکرار ہو رہی ہے، اس لیے x کو 100 سے ضرب کرتے ہیں تاکہ ہمیں حاصل ہو۔

$$100x = 23.53535...$$

$$100x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

$$99x = 23.3$$

تو
اس لیے

$$99x = \frac{233}{10} \quad \text{یعنی اس لئے جس سے حاصل ہوتا ہے } \frac{233}{990}$$

$$\frac{233}{990} = 0.235 \quad \text{آپ اس کے معکوس کی جانچ کر سکتے ہیں کہ}$$

اس طرح سے ہر وہ عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوتا ہے۔ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جہاں p اور q ($q \neq 0$) صحیح اعداد ہیں، اس لیے اب ان نتائج کو مختصراً مندرجہ ذیل شکل میں لکھیں۔

ایک ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو مختتم ہوتا ہے یا غیر مختتم یا پھر ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ مختتم اور غیر مختتم ہوتا ہے، وہ ناطق ہوتا ہے۔

اس طرح سے اب ہم ناطق عدد کے عشری پھیلاؤ کو جانتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مذکورہ بالا خصوصیت سے ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ ان کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے۔ اس لیے غیر ناطق اعداد کی خصوصیت ایسی ہی ہے جیسی اوپر ناطق اعداد کے لئے بیان کی گئی ہے۔ ایک غیر ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے یا دوسرے لفظوں میں ایک عدد جس کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہو غیر ناطق ہے۔

$$s = 0.1011011101111110.... \quad \text{یاد کیجیے پچھلے سیکشن میں}$$

نوٹ کیجیے کہ یہ نہ تو مختتم ہے اور نہ ہی تکراری۔ اس لیے مندرجہ بالا خصوصیت کے مطابق یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔ مزید یہ کہ s جیسے لا تعداد غیر ناطق اعداد آپ معلوم کر سکتے ہیں۔

مشہور غیر ناطق عدد $\sqrt{2}$ اور π کے بارے میں آپ کیا کہتے ہیں؟ یہاں ان کے ایک خاص مقام تک عشری پھیلاؤ دیے گئے ہیں۔

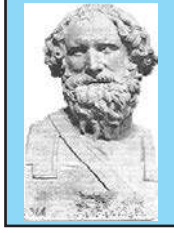
$$\sqrt{2} = 1.414135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.141592653859793238462643383327950...$$

$$\pi \neq \frac{22}{7} \quad \text{نوٹ کیجیے کہ ہم اکثر } \pi \text{ کی تقریباً قدر } \frac{22}{7} \text{ لیتے ہیں لیکن}$$

طویل عرصہ سے ریاضی دانوں نے غیر ناطق اعداد کے عشری پھیلاؤ کو زیادہ سے زیادہ ہندسوں میں معلوم کرنے کی مختلف قسم کی تکنیک نکالی ہیں۔ مثال کے طور پر $\sqrt{2}$ کے عشری پھیلاؤ میں آنے والے ہندسوں کو آپ تقسیم سے معلوم کرنے کا

طریقہ پڑھ چکے ہیں۔ دلچسپ بات یہ ہے کہ ویدک عرصہ (800-500 ق م) کے سلباسوترا (Sulbasutras) (وتر کے



آرکمیڈیز (287 ق م - 212 ق م)
شکل: 1.10

یونانی آرکمیڈیز وہ پہلا شخص تھا جس نے π کے عشری پھیلاؤ کے ہندسے معلوم کیے۔ اس نے دکھایا کہ $3.140845 < \pi < 3.142857$ آرہیہ بھٹ (476-550 عیسوی) عظیم ہندستانی ریاضی داں اور ماہر فلکیات نے اعشاریہ کے 4 ہندسوں تک π کی صحیح قیمت (3.1416) معلوم کی تیز رفتار کمپیوٹر اور ایڈوانس algorithms کی مدد سے π کی تقریباً اعشاریہ کے ٹری لین ہندسوں تک قیمت معلوم کی جا چکی ہے۔

قواعد) کے مطابق آپ $\sqrt{2}$ کی تقریبی قدر مندرجہ ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

نوٹ کیجیے کہ اعشاریہ کے پہلے 5 ہندسوں تک اس کی قیمت وہی ہے جو اوپر دی گئی ہے۔ π کے عشری پھیلاؤ میں ہندسوں کی تلاش کی تاریخ بہت دلچسپ ہے۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد کیسے حاصل کیے جاتے ہیں۔

مثال 10: $\frac{1}{7}$ اور $\frac{2}{7}$ کے درمیان غیر ناطق عدد معلوم کیجیے۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.142857$ اس لیے آپ آسانی سے حل کر سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7} = 0.285714$ اور $\frac{1}{7}$

کے درمیان ایک غیر ناطق عدد معلوم کرنے کے لیے ہم ایک ایسا عدد معلوم کریں گے جو نہ ختم ہو اور نہ تکراری ہو اور ان کے درمیان بھی ہو۔ یقیناً آپ ایسے لامحدود اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔ ایسے ایک عدد کی مثال ہے $0.150150015000150000...$

مشق 1.3

1. مندرجہ ذیل کو عشری شکل میں لکھیے اور بتائیے کہ یہ کس قسم کا عشری پھیلاؤ ہے۔

(i) $\frac{36}{100}$

(ii) $\frac{1}{11}$

(iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{11}$

(v) $\frac{2}{11}$

(vi) $\frac{329}{400}$

2. آپ جانتے ہیں کہ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ کیا آپ طویل تقسیم کے بغیر اندازہ لگا سکتے ہیں کہ $\frac{2}{7}$ ، $\frac{3}{7}$ ، $\frac{4}{7}$ ، $\frac{5}{7}$ اور

$\frac{6}{7}$ کے عشری پھیلاؤ کیا ہیں؟ اگر کر سکتے ہیں تو کیسے؟

(اشارہ: $\frac{1}{7}$ کی قیمت نکالتے وقت باقیوں پر غور کیجیے۔)

3. مندرجہ ذیل کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

(i) $0.\overline{6}$

(ii) $0.\overline{7}$

(iii) $0.\overline{001}$

4. $0.99999\dots$ کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے۔ کیا آپ اپنے جواب سے متحیر ہیں۔ اپنے استاد اور کلاس کے ساتھیوں سے بحث

کیجیے کہ جواب کا کوئی مطلب ہے۔

5. $\frac{1}{17}$ کے عشری پھیلاؤ میں ہندسہ کے تکراری بلاک میں ہندسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد کیا ہو سکتی ہے؟ تقسیم کر کے اپنے

جواب کی جانچ کیجیے۔

6. $\frac{p}{q}$ کی شکل والے ناطق اعداد جیسی بہت سی مثالوں کو دیکھئے جن میں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔ جس میں کے

علاوہ کوئی بھی مشترک جزو ضربی نہ ہو اور ان کا عشری اظہار ختم ہو۔ کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ q کون سی خصوصیت پیش کرتا ہے؟

7. تین ایسے اعداد لکھیے جن کا عشری اظہار غیر ختم اور غیر تکراری ہو۔

8. $\frac{5}{7}$ اور $\frac{9}{11}$ کے درمیان تین مختلف غیر ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

9. مندرجہ ذیل اعداد کی ناطق اور غیر ناطق میں درجہ بندی کیجیے۔

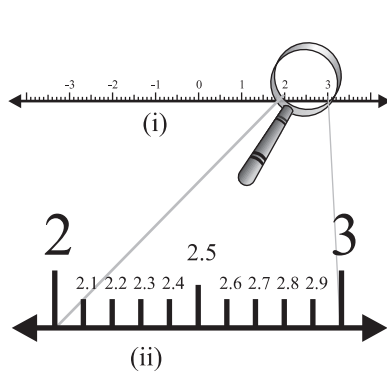
i) $\sqrt{23}$
(iv) 7.478478

(ii) $\sqrt{225}$
(v) 1.101001000100001...

(iii) 0.3796

1.4 حقیقی اعداد کا عددی خط پر اظہار:

(Representing Real Numbers on the Number Line)



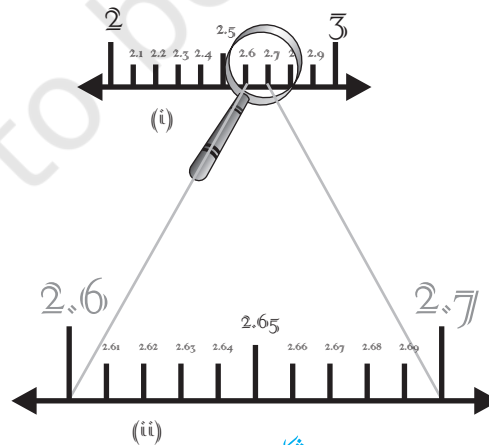
شکل 1.11

پچھلے سیشن میں آپ دیکھ چکے ہیں کہ ہر حقیقی عدد کا عشری پھیلاؤ ہوتا ہے۔ اس سے ہمیں ان کو عددی خط پر ظاہر کرنے میں مدد ملتی ہے۔ آئیے دیکھتے ہیں کیسے؟

فرض کیجیے ہمیں 2.665 کو عددی خط پر ظاہر کرنا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ 2 اور 3 کے درمیان واقع ہے۔

اس لیے آئیے عددی خط کے اس حصہ پر غور کرتے ہیں جو 2 اور 3 کے درمیان ہے۔ ہم اس کو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر تقسیم کو مارک (Mark) کرتے ہیں جیسا کہ شکل 1.11(i) میں دکھایا گیا ہے۔ 2 کے

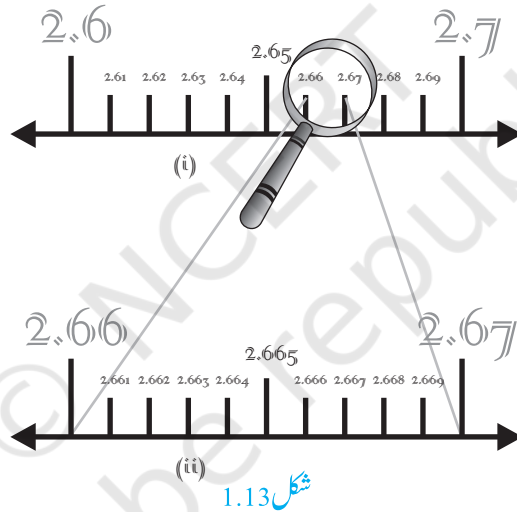
دائیں طرف پہلا مارک 2.1 کو ظاہر کرتا ہے دوسرے کو 2.2 اور اس طرح آگے تک۔ شکل 1.11(i) میں 2 اور 3 کے درمیان ان مارک کا مشاہدہ کرنے میں آپ کو کچھ پریشانی ہو رہی ہوگی۔ ان کو صاف طور پر دیکھنے کے لیے آپ ایک تکبیری شیشہ لیجیے اور 2 اور 3 کے درمیان والے حصہ کو دیکھیے۔ یہ ایسا نظر آئے گا جیسا آپ شکل 1.11(ii) میں دیکھتے ہیں۔



شکل 1.12

2.66.C 2.6 اب اور 2.7 کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے اب ہم اپنی توجہ 2.6 اور 2.7 کے درمیان والے حصہ پر مرکوز کرتے ہیں۔ ہم اس حصہ کو مزید 10 حصوں میں بانٹتے ہیں۔ اس حصہ میں پہلا مارک 2.61 اور دوسرا 2.62 کو ظاہر کرتا ہے، اس طرح سے آگے بھی۔ اس کو صاف طور سے دیکھنے کے لیے آپ تکبیری شیشہ کا استعمال کر سکتے ہیں جیسا کہ شکل 1.12 (ii) میں دکھایا گیا ہے۔

2.665 دوبارہ 2.66 اور 2.67 کے درمیان واقع ہے۔ آئیے عددی خط کے اس حصہ پر اپنی توجہ مرکوز کریں (شکل 1.13 (i) دیکھئے) اور تصور کیجئے کہ آپ مزید اس کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس کو بہتر طور پر دیکھنے کے لیے آپ تکبیری شیشہ کا استعمال کر سکتے ہیں جیسا کہ شکل 1.13 (ii) میں دکھایا گیا ہے۔ پہلا نشان 2.261 اور اگلا نشان 2.262 کو ظاہر



شکل 1.13

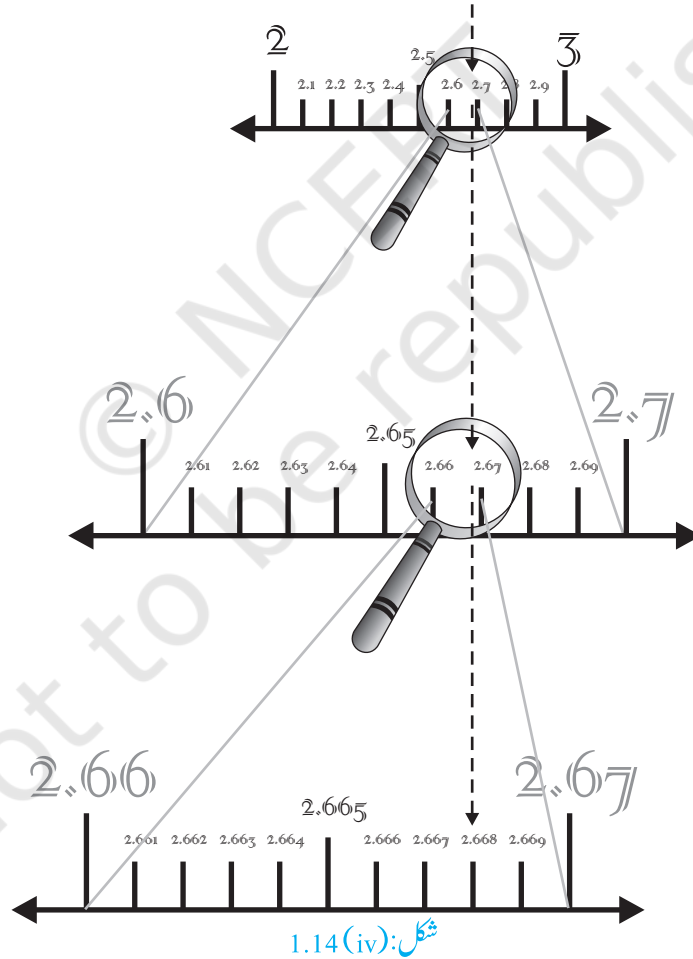
کرتا ہے۔ اس طرح پانچواں نشان 2.265 کو ظاہر کرتا ہے۔

تکبیری شیشہ کے ذریعہ عددی خط پر ان اعداد کے اظہار کو دیکھنے کے عمل کو ہم متواتر تکبیری عمل کہتے ہیں۔ اس طرح سے ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک مختتم پھیلاؤ والے حقیقی عدد کے عددی خط پر اظہار کو متواتر تکبیر کے عمل سے دیکھنا ممکن ہے۔ اس لیے اب ایک غیر مختتم اور تکراری حقیقی عدد کے عددی خط پر اظہار کو دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ ہم تکبیری شیشہ کے ذریعے مناسب وقفوں کو دیکھ سکتے ہیں اور متواتر تکبیر کے عمل سے عددی خط پر اس عدد کے اظہار کو دیکھتے ہیں۔

مثال 11: عددی خط پر 5.37 کے اظہار کو اعشاریہ کے 5 مقاموں تک یعنی 5.37777 تک دیکھئے۔

حل: ہم ایک بار پھر متواتر تکبیر سے آگے بڑھتے ہیں اور مستقل عددی خط کے اس حصہ کی لمبائی کو گھٹاتے رہتے ہیں جس میں $5.3\bar{7}$ واقع ہے۔ پہلے ہم دیکھتے ہیں کہ 5 اور 6 کے درمیان $5.3\bar{7}$ واقع ہے۔

اگلے قدم میں ہم دیکھتے ہیں کہ 5.3 اور 5.4 کے درمیان $5.3\bar{7}$ واقع ہے۔ زیادہ درستگی کے ساتھ دیکھنے کے لیے عددی خط کے اس حصہ کو ہم مزید 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور تکبیری شیشہ سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ 5.37 اور 5.38 کے درمیان $5.3\bar{7}$ واقع ہے۔ $5.3\bar{7}$ کو مزید درستگی سے دیکھنے کے لیے ہم ایک بار پھر 5.377 اور 5.378 کے درمیانی حصہ کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور $5.3\bar{7}$ کے اظہار کا مشاہدہ کرتے ہیں جیسا کہ شکل 1.14 (iv) میں دکھایا گیا ہے۔ نوٹ کیجیے 5.3778 کے زیادہ نزدیک 5.37 واقع ہے بہ نسبت 5.3777 کے۔ [دیکھئے شکل 1.14 (iv)]



ریمارک: ہم اس طرح سے تکبیری شیشہ سے دیکھتے ہوئے عددی خط کی اس حصہ کی لمبائی کو کم کرتے رہیں گے جس میں 5.37 واقع ہے اور یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ مذکورہ حصہ کا سائز اس بات پر منحصر کرتا ہے کہ ہم کسی درستگی کے ساتھ عددی خط پر مطلوبہ عدد کے مقام کو Visualize کرتے ہیں۔

اب تک آپ یہ بات سمجھ چکے ہوں گے کہ اسی طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم ایسے حقیقی عدد کا مقام عددی خط پر معلوم کر سکتے ہیں جس کا عشری پھیلاؤ غیر ختم اور غیر تکراری ہو۔
مذکورہ بالا بحث کی روشنی میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہر حقیقی عدد، عددی خط پر ایک یکتا نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید عددی خط پر ہر ایک نقطہ ایک اور صرف ایک حقیقی عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

مشق 1.4

1. متواتر تکبیر کا استعمال کرتے ہوئے 3.765 کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔
2. 4.26 کو اعشاریہ کے 4 مقاموں تک عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

1.5 حقیقی اعداد پر عملیات: (Operations on Real Numbers)

پچھلی جماعتوں میں آپ ناطق اعداد کی تقابلی، تلازمی اور جمع اور ضرب کی تقابلی خصوصیت کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ اگر ہم دو ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم (صفر کے علاوہ) کریں تو ایک ناطق عدد ہی حاصل ہوتا ہے (یعنی ناطق اعداد، جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے لیے بند ہیں)۔ اب ہم آسانی سے یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد بھی جمع اور ضرب کی تقابلی خصوصیت، تقابلی اور تلازمی خصوصیت کو ظاہر کرتے ہیں۔ لیکن غیر ناطق اعداد کا حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب اور خارج قسمت ہمیشہ غیر ناطق نہیں ہوتا۔ مثال کے طور پر $\sqrt{6} + (-\sqrt{6})$ ، $(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})$ ، $(\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3})$ اور $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ ناطق ہیں۔

آئیے اب ہم دیکھتے ہیں کہ جب ہم ایک ناطق عدد کو غیر ناطق عدد میں جمع، تفریق یا ضرب کرتے ہیں تو کیا حاصل ہوتا ہے۔
مثال کے طور پر $\sqrt{3}$ غیر ناطق ہے۔ $2 + \sqrt{3}$ اور $2\sqrt{3}$ کے بارے میں آپ کا کیا خیال ہے؟
چونکہ $\sqrt{3}$ ایک غیر ختم اور غیر تکراری عدد ہے اور یہی بات $2 + \sqrt{3}$ اور $2\sqrt{3}$ کے لیے بھی درست ہے۔

اس لیے $2 + \sqrt{3}$ اور $2\sqrt{3}$ دونوں بھی غیر ناطق ہیں۔

مثال 12: جانچ کیجیے کہ $7\sqrt{5}$ ، $\frac{7}{\sqrt{5}}$ ، $\sqrt{2} + 21$ ، $\pi - 2$ غیر ناطق عدد ہیں یا نہیں۔

حل: $\pi = 3.1415$ ، $\sqrt{2} = 1.4142...$ ، $\sqrt{5} = 2.236...$

$$7\sqrt{5} = 15.652...، \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304 \quad \text{تب}$$

$$\sqrt{2} + 21 = 22.4142...، \pi - 5 = 1.1415...$$

یہ تمام غیر مختتم اور غیر تکراری اعشاریہ ہیں۔ اس لیے یہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

آئیے دیکھتے ہیں کہ عموماً کیا ہوتا ہے اگر ہم غیر ناطق اعداد کی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم یہاں تک کہ ان کے جزء المربع اور n واں جزء معلوم کرتے ہیں جب n ایک فطری عدد ہے آئیے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 13: $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ اور $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ کو جمع کیجیے

$$(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = (3\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3})$$

$$= (2+1)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

مثال 14: $6\sqrt{5}$ کو $2\sqrt{5}$ سے ضرب کیجیے

$$6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$$

مثال 15: $8\sqrt{5}$ کو $2\sqrt{3}$ سے تقسیم کیجیے

$$8\sqrt{5} \div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3} \times 5}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$$

ان مثالوں سے مندرجہ ذیل حقیقتوں سے آگاہی ہوتی ہے۔

- (i) ایک ناطق عدد اور ایک غیر ناطق عدد کا حاصل جمع یا حاصل فرق غیر ناطق ہوتا ہے۔
- (ii) ایک غیر صفر ناطق عدد اور ایک غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا تقسیم غیر ناطق ہوتا ہے۔

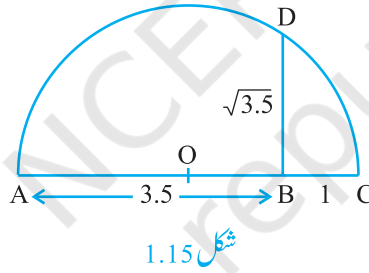
(iii) اگر ہم ”غیر ناطق اعداد کی جمع، گھٹاؤ، ضرب یا تقسیم کرتے ہیں تو نتیجہ ناطق یا غیر ناطق کچھ بھی ہو سکتا ہے اب ہم اپنی توجہ حقیقی اعداد کا جز رنگا لے پر مرکوز کرتے ہیں۔

یاد کیجیے کہ اگر a ایک فطری عدد ہے تو $\sqrt{a} = b$ کا مطلب ہے $b^2 = a$ اور $b > a$

اسی تعریف کو مثبت حقیقی اعداد کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

مان لیجیے کہ $a > b$ ایک حقیقی عدد ہے تب $\sqrt{a} = b$ کا مطلب $b^2 = a$ اور $b > 0$

سیکشن 1.2 میں نے ہم دیکھا کہ $\sqrt{n}$ کو کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے کس طرح عددی خط پر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اب ہم جیومیٹریائی طریقہ سے دکھائیں گے کہ کس طرح سے کسی بھی مثبت حقیقی عدد x کے لئے $\sqrt{x}$ کی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر $x = 3.5$ کے لیے معلوم کرتے ہیں یعنی جیومیٹریائی طریقہ سے ہم $\sqrt{3.5}$ کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔



شکل 1.15

دیے ہوئے خط پر ایک متعین نقطہ A سے 3.5 اکائیوں کے فاصلہ پر ایک نقطہ B اس طرح حاصل کیجیے (شکل 1.15 دیکھئے) کہ $AB = 3.5$ ہو۔ B سے ایک اکائی کے فاصلہ پر دوسرا نقطہ C مارک کیجیے۔ AC کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے اور اسے O مارک کیجیے۔ O کو مرکز مان کر OC نصف قطر کا ایک نصف دائرہ بنالیجیے۔ B سے گزرتا ہوا ایک ایسا خط کھینچیے جو AC پر عمود ہو اور نصف دائرہ کو نقطہ D پر قطع کرے۔ تب $BD = \sqrt{3.5}$ عمومی طور پر کسی بھی مثبت حقیقی عدد کے لیے $\sqrt{x}$ معلوم کرنے کے لیے ہم B کو اس طرح مارک کرتے ہیں کہ $AB = x$ جیسا کہ شکل 1.16 میں دکھایا گیا ہے اور C اس طرح مارک کریں گے کہ $BC = 1$ جیسا کہ ہم نے $x = 3.5$ کے لیے کیا ہے۔ ہم پاتے ہیں کہ $BD = \sqrt{x}$ (شکل 1.16 میں دیکھئے) اس نتیجہ کو ہم پتھا گورس کے مسئلہ کو استعمال کر کے ثابت کر سکتے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ شکل 1.16 میں $\triangle OBD$ ایک قائم زاوی مثلث ہے۔ اور دائرہ کا نصف قطر $\frac{x+1}{2}$ اکائیاں ہیں۔

$$OC = OD = OA = \frac{x+1}{2} \quad \text{اس لیے اکائیاں}$$

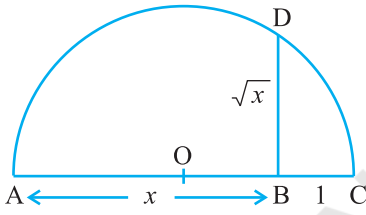
$$OB = x - \left(\frac{x+1}{2} \right) = \frac{x-1}{2} \quad \text{اب}$$

اس لیے پیتھاگورس کے مسئلہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

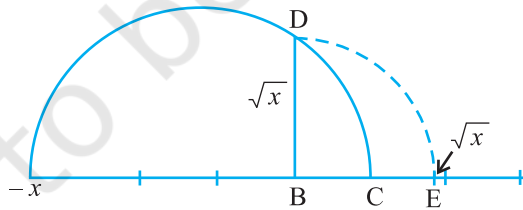
$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-1}{2} \right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ $BD = \sqrt{x}$

اس بناوٹ سے ہمیں یہ پتہ چلتا ہے کہ جیومیٹریائی طریقہ سے ہم تمام $\sqrt{x}$ حقیقی اعداد کے لیے $x > 0$ کے وجود کو دکھا سکتے ہیں۔ اگر آپ عددی خط پر $\sqrt{x}$ کا مقام معلوم کرنا چاہیں تو آپ خط BC کو عددی خط تصور کیجیے۔ جس میں B کو صفر اور C کو لیں اور اسی طرح آگے تک B کو مرکز مان اور BD نصف قطر لے کر ایک قوس بنالیں جو عددی خط کو نقطہ E پر قطع کرے (شکل 1.17 دیکھیے)۔ تب E، $\sqrt{x}$ کو ظاہر کرے گا۔



شکل 1.16



شکل 1.17

اب ہم چاہیں گے کہ جزر المربع کا تصور اب جزر الکعب، چوتھا جزر اور عددی طور پر n واں جزر کو معلوم کرنے کے لیے استعمال کریں جہاں n ایک مثبت عدد ہے۔ پچھلی جماعتوں میں آپ نے جزر المربع، جزر الکعب کے بارے جو کچھ سیکھا ہے، اس کو دہرایئے۔

$\sqrt[3]{8}$ کیا ہے؟ ہم جانتے ہیں کہ یہ وہ مثبت عدد ہے جس کا کعب 8 ہے، آپ نے اندازہ لگایا ہوگا کہ $\sqrt[3]{8} = 2$ ۔ آئیے $\sqrt[3]{243}$ کو معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ کیا آپ کسی ایسے عدد کے بارے میں جانتے ہیں جہاں $b^5 = 243$ اس کا جواب 3 ہے۔ اس لیے $\sqrt[3]{243} = 3$

ان مثالوں سے کیا آپ $\sqrt[n]{a}$ کی تعریف بیان کر سکتے ہیں جہاں $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد؟
مان لیجیے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد۔ تب $\sqrt[n]{a} = b$ اگر $b^n = a$ اور $b > 0$
نوٹ کیجئے کہ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[n]{a}$ وغیرہ میں علامت $\sqrt{\quad}$ کا استعمال کیا گیا ہے اس علامت $\sqrt{\quad}$ کو جزری علامت (Radical Sign) کہتے ہیں۔

اب ہم جذر المربع سے متعلق کچھ مماثلات کی فہرست بناتے ہیں جو مختلف طور پر ہمارے لیے مفید ہیں۔ ان میں سے کچھ سے آپ پچھلی جماعتوں میں ہی واقف ہو چکے ہیں اور باقی کو ہم حقیقی اعداد پر جمع پر ضرب کی تقسیمی خصوصیت کا استعمال کر کے معلوم کر سکتے ہیں اور کچھ کو $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$ جہاں x اور y حقیقی اعداد ہیں کا استعمال کر کے۔
مان لیجیے a اور b مثبت حقیقی اعداد ہیں

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$	(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	تب تو یعنی
(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$	(iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$	
(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$		
(vi) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$		

اس لیے ان مماثلات کی کچھ خاص صورتوں کو دیکھتے ہیں۔

مثال 16: درج ذیل عبارتوں کو مختصر کیجیے:

(i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5})$	(ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})$
(iii) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2$	(iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})$

(i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$ **حل:**

(ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (\sqrt{7})^2 = 11 - 7 = 4$

ریمارک: نوٹ کیجیے کہ درج بالا مثال میں مختصر کا مطلب ہے کہ عبارت کو ناطق اعداد اور غیر ناطق اعداد کے حاصل جمع کی شکل میں لکھنا۔

اس سیکشن کا اختتام ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کو لے کر کرتے ہیں۔ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو دیکھئے، کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ یہ عددی خط پر کہاں واقع ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ یہ غیر ناطق ہے۔ اس کو آپ آسانی سے بتا سکتے تھے جب کہ نسب تمام ناطق ہوتا۔ آئیے دیکھتے ہیں کہ کیا ہم نسب نما کو ناطق بنا سکتے ہیں؟ یعنی نسب نما کو ایک ناطق عدد بنا سکتے ہیں۔ ایسا کرنے کے لیے ہم ان مماثلات کا استعمال کرتے ہیں جن میں جز شامل ہیں۔ آئیے دیکھتے ہیں کہ کیسے۔

مثال 17: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے

حل: ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو اس عبارت کے متبادل لکھنا چاہتے ہیں۔ جس میں نسب نما ناطق عدد ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

ناطق ہے۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ سے ضرب کرنے پر ایک معادل عبارت حاصل ہوتی ہے کیونکہ

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{۔ اس لیے ہم ان دونوں حقیقتوں کو ایک ساتھ رکھ کر حاصل کرتے ہیں}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اس شکل میں ہم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو آسانی سے عددی خط پر تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ 0 اور $\sqrt{2}$ کے درمیان آدھے فاصلے پر واقع ہے۔

مثال 18: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے۔

حل: یہاں ہم مماثل (iv) کا استعمال کرتے ہیں جو اوپر دیا گیا ہے۔ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ کو $2-\sqrt{3}$ سے ضرب اور تقسیم کرتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

مثال 19: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے:

حل: یہاں ہم مماثل (iii) کا استعمال کرتے ہیں۔

اس لیے

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{5})$$

مثال 20: $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ کے نسب نما کو ناطق بنائیے:

$$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

اس لیے جب کسی عبارت کے نسب نما میں ایسا رکن ہو جس میں جزر ہو، اس کو ایسی عبارت کے معادل تبدیل کرنے کے لیے جس کا نسب نما ناطق ہو، ہم نسب نما کو ناطق بنانا کہتے ہیں۔

مشق 1.5

1. مندرجہ ذیل اعداد کی ناطق اور غیر ناطق میں درجہ بندی کیجئے:

(i) $2-\sqrt{3}$

(ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$

(iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iv) 2π

2. مندرجہ ذیل عبارت کو مختصر کیجئے:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2}) & \text{(ii)} (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) \\ \text{(iii)} (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 & \text{(iv)} (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \end{array}$$

3. یاد کیجئے کہ π کو ہم دائرہ کے محیط (C) اور اس کے قطر (d) کی نسبت کے طور پر جانتے ہیں یعنی $\pi = \frac{C}{d}$ ۔ یہ اس

حقیقت کی نفی کرتا ہے کہ π ایک غیر ناطق عدد ہے۔ اس تضاد کو آپ کس طرح سے ٹھیک کریں گے؟

4. $\sqrt{9.3}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجئے۔

5. مندرجہ ذیل کے نسب نماؤں کو ناطق بنائیے:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \frac{1}{\sqrt{7}} & \text{(ii)} \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} & \text{(iii)} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \\ \text{(iv)} \frac{1}{\sqrt{7} - 2} & & \end{array}$$

1.6 حقیقی اعداد کے لیے قوت نما کے قوانین: (Laws of Exponents for Real Numbers)

کیا آپ کو یاد ہے کہ درج ذیل کی تحسیب کس طرح کریں گے؟

$$\text{(i)} 17^2 \cdot 17^2 = \quad \text{(ii)} (5^2)^2 =$$

$$\text{(iii)} \frac{23^{10}}{23^7} = \quad \text{(iv)} 7^3 \cdot 9^3 =$$

کیا آپ یہ جوابات حاصل کر سکتے ہیں؟ یہ مندرجہ ذیل ہیں:

$$\text{(i)} 17^2 \cdot 17^2 = 17^4 \quad \text{(ii)} (5^2)^2 = 5^4$$

$$\text{(iii)} \frac{23^{10}}{23^7} = 23^3 \quad \text{(iv)} 7^3 \cdot 9^3 = 63^3$$

ان جوابات کو حاصل کرنے کے لیے آپ نے مندرجہ ذیل قوت نما کے قوانین کا استعمال کیا (یہاں m اور n فطری

اعداد ہیں یا دیکھئے کہ a اساس کہلاتا ہے اور m اور n قوت نما) جو آپ پچھلی جماعتوں میں پڑھ چکے ہیں۔

$$(i) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ii) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(iii) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$$

$$(iv) a^m b^m = (ab)^m$$

$(a)^0$ کیا ہے؟ ہاں یہ 1 ہے۔ اس طرح سے آپ سیکھ چکے ہیں کہ $(a)^0 = 1$ اس لیے (iii) کا استعمال کرتے ہوئے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ ۔ اس طرح سے ہم ان قوانین کو منفی قوت نماؤں کے لیے آگے بڑھا سکتے ہیں۔ اس لئے مثال کے طور پر

$$(i) 17^2 \cdot 17^{-5} = 17^3 = \frac{1}{17^3}$$

$$(ii) (5^2)^{-7} = 5^{-14}$$

$$(iii) \frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$$

$$(iv) (7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$$

فرض کیجئے ہم درج ذیل تحسیات کرنا چاہتے ہیں:

$$(i) 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{3^5}\right)^4$$

$$(iii) \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$$

$$(iv) 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$$

ہم انہیں کس طرح سے حاصل کریں گے؟ ان کو حل کرنے کے لیے ہم قوت نماؤں کے قوانین جن کو پہلے پڑھ چکے ہیں اس کو ناطق اعداد کے لیے آگے بڑھا سکتے ہیں یہاں تک کہ جب اساس مثبت حقیقی اعداد اور قوت نما ناطق اعداد ہوں (بعد میں آپ مزید سیکھیں گے کہ ان کو قوانین کو تب بھی استعمال کر سکتے ہیں جب قوت نما حقیقی عدد ہو)۔ اس سے پہلے کہ ہم ان قوانین کو بیان کریں ہم ان کو سمجھنے کی پہلے کوشش کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر $4^{\frac{3}{2}}$ لیجئے۔ اس کے لیے ہمیں کچھ کام کرنا ہے۔

سیکشن 1.4 میں ہم نے کسی بھی حقیقی عدد $a > 0$ کے لیے $\sqrt[n]{a}$ کو درج ذیل طریقہ سے معرف کیا تھا۔

مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور n ایک مثبت صحیح عدد۔ تب $\sqrt[n]{a} = b$ ، اگر $b^n = a$ اور $b > 0$

قوت نماؤں کی زبان میں ہم تعریف بیان کرتے ہیں $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ اس لیے خاص طور پر $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ اب ہم $4^{\frac{2}{3}}$ کو دو طریقوں سے مختصر کر سکتے ہیں۔

$$4^{\frac{2}{3}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{2}{3}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

اس لیے اب ہمارے پاس درج ذیل تعریف ہے:

مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے۔ مان لیجئے m اور n صحیح اعداد ہیں اور ان میں 1 کے علاوہ کوئی بھی مشترک جز و ضربی

ہیں ہے اور $a > 0$ تب

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

اب ہمارے پاس نئے قوت نما کے قوانین ہیں جو درج ذیل ہیں:

مان لیجئے $a > 0$ حقیقی اعداد ہے اور p اور q ناطق اعداد۔ تب ہمارے پاس:

$$(i) a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(ii) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(iii) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(iv) a^p b^p = (ab)^p$$

ان قوانین کا استعمال آپ اوپر پوچھے گئے سوالات کا جواب دینے کے لیے کر سکتے ہیں۔

مثال 21: مختصر کیجئے:

$$(i) 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{3^5}\right)^4$$

$$(iii) \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$$

$$(iv) 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$$

$$(i) 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$$

$$(ii) \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$$

$$(iii) \frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{-\frac{2}{15}}$$

$$(iv) 13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$$

حل:

مشق: 1.6

1. معلوم کیجیے
 - (i) $64^{\frac{1}{2}}$
 - (ii) $32^{\frac{1}{5}}$
 - (iii) $125^{\frac{1}{3}}$
2. معلوم کیجیے:
 - (i) $9^{\frac{3}{2}}$
 - (ii) $32^{\frac{2}{5}}$
 - (iii) $16^{\frac{3}{4}}$
 - (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$
3. مختصر کیجیے:
 - (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$
 - (ii) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^7$
 - (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$
 - (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 خلاصہ:

اس باب میں آپ نے درج ذیل اہم باتیں سیکھیں:

1. ایک عدد r ناطق عدد ہوتا ہے، اگر اس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکے جہاں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔
2. ایک عدد غیر ناطق کہلاتا ہے جب وہ $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہ لکھا جاسکے تو جہاں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ۔
3. ایک ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ یا تو ختم ہوتا ہے یا غیر ختم تکراری یا ایک حقیقی عدد جس کا عشری پھیلاؤ ختم یا غیر ختم تکراری ہوتا ہے، ناطق عدد ہوتا ہے۔
4. ایک غیر ناطق عدد کا عشری پھیلاؤ نہ تو ختم ہوتا ہے نہ غیر ختم تکراری یا ایک حقیقی عدد جس کا غیر پھیلاؤ غیر ختم غیر تکراری ہو غیر ناطق ہے۔
5. تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر حقیقی اعداد کہلاتے ہیں۔
6. عددی خط پر ہر نقطہ ایک ناطق عدد کو ظاہر کرتا ہے یا دوسرے طریقہ سے کہیں تو ہر حقیقی عدد کے لیے عددی خط پر ایک حقیقی ہوتا ہے، ناطق عدد حقیقی خط کے اوپر۔
7. اگر r ناطق ہے اور s غیر ناطق تب $r+s$ ، $r-s$ ، rs ، $\frac{r}{s}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔

8. مثبت حقیقی اعداد a اور b کے لیے مندرجہ ذیل مماثلات درست ہیں۔

$$(i) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

$$(ii) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(iii) (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

$$(iv) (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$

$$(v) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

9. $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$ کے نسب نما کو ناطق بنانے کے لیے ہم اس کو $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ سے ضرب کرتے ہیں جہاں a اور b صحیح اعداد ہیں۔

10. مان لیجئے $a > 0$ ایک حقیقی عدد ہے اور p اور q ناطق اعداد ہیں تب

$$(i) a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$(ii) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(iii) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(iv) a^p b^p = (ab)^p$$