



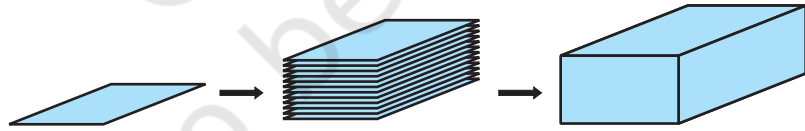
4915CH13

باب 13

سطحی رقبہ اور حجم (SURFACE AREAS AND VOLUMES)

13.1 تعارف (Introduction)

ہم جہاں بھی دیکھتے ہیں ہمیں ٹھوس اشیاء نظر آتی ہیں۔ ابھی تک ہم اپنے مطالعہ میں ان اشکال کا ذکر کر رہے تھے جن کو کاپی یا بلیک بورڈ پر آسانی سے بنایا جاسکتا ہے۔ یہ مستوی اشکال کہلاتی ہیں، ہم سمجھ چکے ہیں کہ مستطیل مربع اور دائرہ وغیرہ؟ ان کے احاطہ اور رقبہ سے کیا مراد ہے اور ہم ان کی تحسیب کیسے کرتے ہیں، ہم ان کو پچھلی کلاسوں میں بھی پڑھ چکے ہیں۔ بہت دلچسپ ہوگا یہ دیکھنا کہ جب ایک ہی شکل اور سائز کی مستوی اشکال کو گنتی کی ایک شیٹ سے کاٹ کر عمودی طور پر ایک دوسرے پر رکھ دیں تو کیا ہوتا ہے۔ اس عمل سے ہمیں کچھ ٹھوس اشکال (مختصراً ان کو ٹھوس کہتے ہیں) حاصل ہوتی ہیں۔ جیسے کعب نما استوانہ وغیرہ۔ پچھلی کلاسوں میں ہم کعب نما، مکعب اور استوانہ وغیرہ کے سطحی رقبہ اور حجم نکالنا سیکھ چکے ہیں۔ اب ہم کعب نما اور



شکل 13.1

استوانہ کے حجم اور وسطی رقبہ کا تفصیل سے مطالعہ کریں گے اور اس کی توسیع دوسرے ٹھوس جیسے مخروط اور کڑوں تک کریں گے۔

13.2 کعب نما اور مکعب کا سطحی رقبہ (Surface Area of Cuboid and a Cube)

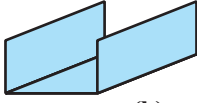
آپ نے بہت سی کاغذ کی شیٹوں کا ایک بنڈل دیکھا ہے؟ یہ کیسا دکھتا ہے؟ کیا یہ ایسا دکھتا ہے جیسا شکل 13.1 میں دکھایا گیا ہے؟ یہ ایک کعب نما کی تشکیل کرتا ہے۔ اس کعب نما کو ڈھکنے کے لئے آپ کو کتنے کاغذ کی ضرورت ہوگی؟

آئیے دیکھتے ہیں:



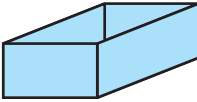
(a)

بنڈل کے نیچے حصہ کو ڈھکنے کے لئے پہلے ہمیں ایک مستطیل نما کاغذ کا ایک ٹکڑا چاہیے۔ جو شکل 13.2 (a) میں دکھایا گیا ہے۔



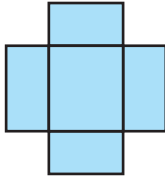
(b)

پھر ہم کو سائڈوں کے سروں کو ڈھکنے کے لئے دو لمبے مستطیل نما کاغذ کے ٹکڑے چاہئیں اب یہ شکل 13.2 (b) کی طرح نظر آئے گی۔



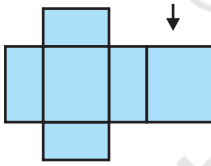
(c)

آگے اور پیچھے کے سروں کو ڈھکنے کے لیے ہمیں مختلف سائز کے دو اور مستطیل نما ٹکڑوں کی ضرورت ہو گیا۔ ان سے ہمیں شکل حاصل ہوگی وہ شکل 13.2 (c) میں دکھائی گئی ہے۔



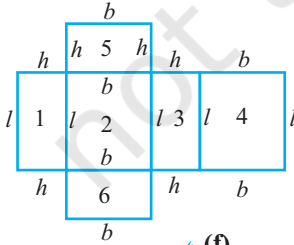
(d)

اس شکل کو جب کھولا جاتا ہے تو یہ شکل (d) 13. کی طرح نظر آتی ہے۔



(e)

آخر میں جب ہمیں بنڈل کی اوپری سطح کو ڈھکنا ہو جو بالکل ایسی ہے جیسے کہ نچلی سطح ہے، تو ہمیں ایک اور مستطیل نما ٹکڑے کی ضرورت ہوگی۔ جب ہم اس کو سیدھی طرف لگائیں گے تو یہ شکل (e) 13.2 کی طرح نظر آئے گی۔



شکل 13.2 (f)

اس طرح سے کعب نما کی باہری سطحوں کو پوری طرح سے ڈھکنے کے لئے ہم نے چھ مستطیل نما ٹکڑے استعمال کئے۔

اس سے پتا چلتا ہے کہ کعب نما کی باہری سطح چھ مستطیلوں سے (درحقیقت مستطیل خطہ) سے ملکر بنتی ہے۔ جن کا رقبہ ہم ہر ایک کی لمبائی اور چوڑائی کو جذب کر کے اور حاصل چھ رقبوں کو ایک ساتھ جمع کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔
اب اگر ہم کعب نما کی لمبائی l ، چوڑائی b اور اونچائی h لیں تب ان ابھار والی شکلیں ایسی ہی ہوں گی جیسی آپ شکل 13.2 (f) میں دیکھتے ہیں۔

اس لئے چھ مستطیلوں کے رقبہ کا حاصل جمع ہے:

$$1 \text{ مستطیل کا رقبہ } (=l \times h)$$

+

$$2 \text{ مستطیل کا رقبہ } (=l \times b)$$

+

$$3 \text{ مستطیل کا رقبہ } (=l \times h)$$

+

$$4 \text{ مستطیل کا رقبہ } (=l \times b)$$

+

$$5 \text{ مستطیل کا رقبہ } (=b \times h)$$

+

$$6 \text{ مستطیل کا رقبہ } (=b \times h)$$

$$=2 (l \times b) + 2 (b \times h) + 2 (l \times h)$$

$$=2 (lb + bh + hl)$$

اس سے حاصل ہوتا ہے

$$\boxed{2(lb + bh + hl) = \text{کعب نما کا کل سطحی رقبہ}}$$

جہاں l اور b بالترتیب کعب نما کے تین کنارے ہیں۔

نوٹ: رقبہ کی اکائی ہم مربع اکائی لیتے ہیں کیوں کہ ہم اس خطہ کی قدر کی پیمائش اس میں اکائی لمبائی کے مربع بھر کر کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر ہمارے پاس ایک مربع نما ہے جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 15cm، 10cm اور 20cm ہے تب اس کا سطحی رقبہ ہوگا۔

$$2 [(15 \times 10) + (20 \times 15) + (10 \times 20)] \text{ cm}^2$$

$$= 2(150 + 200 + 300) \text{ cm}^2$$

$$= 2 \times 650 \text{ cm}^2$$

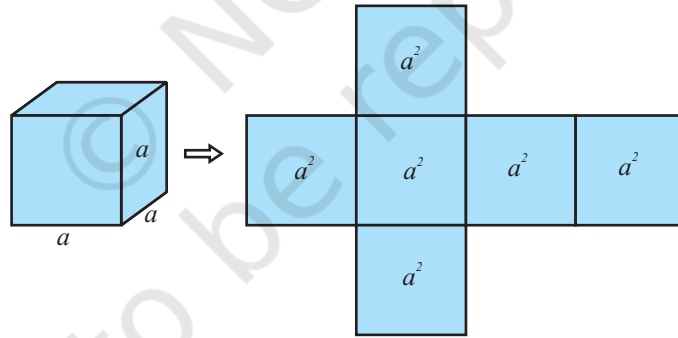
$$= 1300 \text{ cm}^2$$

یاد کیجیے کہ ایسا مکعب نما جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی برابر ہو مکعب کہلاتا ہے۔ اگر مکعب کا ہر ایک کنارہ a ہے تب مکعب کا سطحی رقبہ ہوگا:

(شکل 13.3 دیکھیے) $6a^2$ یعنی $2(a \times a + a \times a + a \times a)$ اس لئے ہمیں ملتا ہے۔

مکعب کا سطحی رقبہ $6a^2 =$

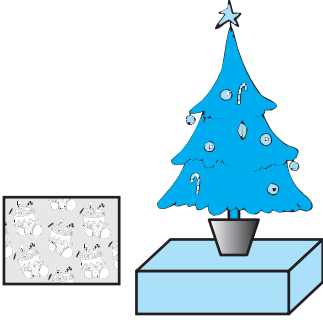
جہاں a مکعب کا کنارہ ہے



شکل 13.3

فرض کیجیے مکعب نما کے چھ رخوں میں سے ہم صرف چار رخوں، اوپر اور نیچے کے رخوں کو چھوڑ کر، کا رقبہ معلوم کریں۔ ایسی حالت میں ان چار رخوں کا رقبہ مکعب نما کا خمیدہ سطح (یا کرول سطح) کا رقبہ کہلاتا ہے۔ اس لئے لمبائی l ، چوڑائی b اور اونچائی h والے مکعب کا خمیدہ سطح کا رقبہ $2lh + 2bh$ یا $2h(l+b)$ کے برابر ہے۔ اسی طرح سے مکعب (cube) کی خمیدہ سطح کا رقبہ $4a^2$ ہے۔ اوپر کی باتوں کو نظر میں رکھتے ہوئے کبھی کبھی ہم مکعب نما (یا مکعب) کے سطحی رقبہ کو ہم کل سطحی رقبہ بھی کہتے ہیں۔ آئیے کچھ مثالوں

کو حل کرتے ہیں۔



شکل 13.4

مثال 1: میری اپنے کرسمس کے درخت کو سجانا چاہتی ہے وہ اس درخت کو رنگین کاغذ سے ڈھکے ہوئے لکڑی ایک بلاک پر رکھتی ہے جس پر سناٹا کلوں کی تصویر بنی ہوتی ہے۔ شکل (13.4) دیکھیے) وہ جاننا چاہتی ہے کہ اس مقصد کو پورا کرنے کے لئے اسے کتنا کاغذ خریدنا ہے۔ اگر بلاک کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 80cm، 40cm اور 20cm ہے تو اسے 40cm ضلع والے کتنے مربع شیٹ کاغذ کی ضرورت ہوگی؟

حل: کیوں کہ میری کاغذ کو بکس کی باہری سطح پر چپکانا چاہتی ہے۔ اس لئے اسے اتنے کاغذ کی ضرورت ہے جتنا اس بکس کا سطحی رقبہ جو ایک کعب نما کی شکل کا ہے، بکس کی ابعاد ہیں:

$$\begin{aligned} \text{لمبائی} &= 80\text{cm، چوڑائی} = 40\text{cm، اونچائی} = 20\text{cm} \\ \text{بکس کا سطحی رقبہ} &= 2(lb + bh + hl) \end{aligned}$$

$$= 2 [(80 \times 40) + 40 \times 20] \text{ cm}^2$$

$$= 2 [3200 + 800 + 1600] \text{ cm}^2$$

$$= 2 \times 5600 \text{ cm}^2 = 11200 \text{ cm}^2$$

$$1600 \text{ cm}^2 = 40 \times 40 \text{ cm}^2 = \text{کاغذ کی ہر ایک شیٹ کا رقبہ}$$

$$\text{اس لئے درکار شیٹ کی تعداد} = \frac{\text{بکس کا سطحی رقبہ}}{\text{کاغذ کی ایک شیٹ کا رقبہ}}$$

$$= \frac{11200}{1600} = 7$$

اس لیے، اسے 7 شیٹوں کی ضرورت ہوگی۔

مثال 2: حامد نے اپنے گھر کے لئے ملبے کی شکل کی ایک ڈھکن سمیت پانی کی ٹنکی بنوائی جس کا ہر کنارہ 1.50 لمبا ہے اس نے ٹنکی کی باہری سطح، قاعدہ کو چھوڑ کر (ہر) کو 25cm ضلع والے مربع ٹائلوں سے ڈھکا۔ (شکل 13.5) دیکھیے) اگر ٹائیوں کا

فی درجن خرچ 360 روپے ہو تو بتائیے اس نے ٹائلوں پر کل کتنا خرچ کیا۔

حل: کیوں کہ حامد ٹینکی کے پانچ رُخوں کو ٹائلوں سے ڈھکنا چاہتا ہے اس لئے اُسے ٹائلوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ٹینکی کا سطحی رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

$$1.5\text{m} = 150\text{cm} (=a) \text{ مکعبی ٹینکی کا کنارہ}$$

$$\text{اس لئے، ٹینکی کا سطحی رقبہ} = 5 \times 150 \times 150 \text{ cm}^2$$

$$25 \times 25 \text{ cm}^2 = \text{ضلع} \times \text{ضلع} = \text{ہر ایک مربع ٹائل کا رقبہ}$$

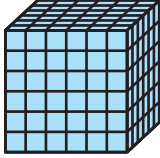
$$\frac{\text{ٹینکی کا سطحی رقبہ}}{\text{ہر ایک ٹائل کا رقبہ}} = \text{اس لیے مطلوبہ ٹائلوں کی تعداد}$$

$$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$$

360 روپے = 12 ٹائلوں کی قیمت یعنی ایک درجن ٹائلوں کی قیمت

$$30 \text{ روپے} = \frac{360}{12} \text{ روپے} = \text{اس لئے ایک ٹائل کی قیمت}$$

$$5400 = 30 \text{ روپے} \times 180 = \text{اس لئے 180 ٹائلوں کی قیمت}$$



شکل 13.5

مشق 13.1

1. 1.5cm لمبائی، 1.25cm چوڑائی اور 65cm گہرائی کا ایک بکس بنانا ہے جو اوپر سے کھلا ہوا ہے۔ پلاسٹک شیٹ کی موٹائی

کو نظر انداز کرتے ہوئے معلوم کیجیے:

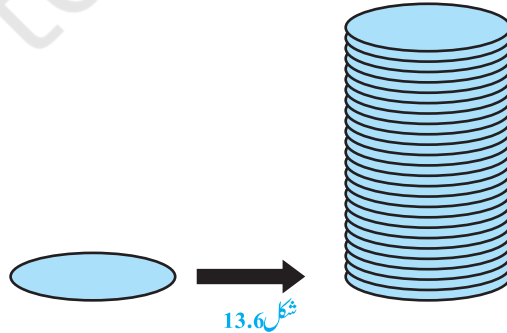
(i) بکس بنانے کے لئے درکار شیٹ کا رقبہ (ii) اگر 1m^2 شیٹ کی قیمت 20 روپیہ ہو تو شیٹ پر کل خرچ ایک کمرہ کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 5m، 4m اور 3m ہے۔ 7.50 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے کمرہ کی دیواروں اور چھتوں پر سفیدی کرانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

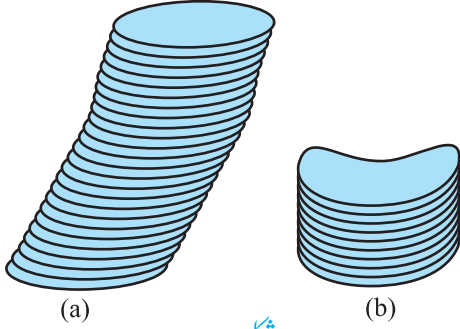
3. ایک مستطیل نما ہال کا احاطہ 250m ہے۔ ہال کی اونچائی معلوم کیجیے اگر 10 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے اس کی چار دیواروں کو پینٹ کرنے کا کل خرچ 15000 روپے ہے۔

4. ایک ڈبے میں اتنا پیٹ ہے کہ جس سے 9.375m رقبہ والے علاقہ کو پوری طرح پیٹ کیا جاسکتا ہے۔
2.2m × 7.5cm × 10cm × 22.5cm ابعاد والی کتنی اینٹیں اس پیٹ سے رگی جاسکتی ہیں؟
5. ایک ملکعی بکس کا کنارہ 10cm ہے اور ایک دوسرا کعب نما بکس 12.5cm لمبا، 10cm چوڑا اور 8cm اونچا ہے
(i) کون سے بکس کی خمیدہ سطح کا رقبہ زیادہ ہوگا اور کتنا؟ (ii) کون سے بکس کا کل سطحی رقبہ کم ہوگا اور کتنا؟
6. ایک چھوٹا گرین ہاؤس (herbarium) پورا کا پورا گلاس پن (glass panes) کا بنا ہوا ہے (قاعدہ سمیت) جس کو ٹیپ سے چپکایا ہوا ہے۔ یہ 30cm لمبا، 25cm چوڑا اور 25cm اونچا ہے
(i) گلاس کا رقبہ کیا ہے؟ (ii) تمام 12 کناروں کے لئے کتنے ٹیپ کی ضرورت ہوگی؟
7. شائق مٹائی والا اپنی مٹھائی کو پیک کرنے کے لئے گتے کے ڈبوں کا ایک (order) دیتا ہے۔ اسے دو سائز کے ڈبے درکار ہیں۔ بڑے ڈبے کی ابعاد 25cm × 20cm × 5cm اور چھوٹے ڈبے کی ابعاد 15cm × 12cm × 5cm ہیں۔ کل سطحی رقبہ کا 5% زائد ڈبے بند کرنے کے لئے چاہئے۔ ہر ایک قسم کے 250 ڈبوں کے لئے مطلوبہ گنے کا خرچ معلوم کیجئے۔
8. پروین اپنی کار کے لیے ایک عارضی سائبان Shelter بنانا چاہتی ہے۔ وہ اپنی اس چاہت کو تار پولین کا سلسلہ نماک ڈھانچہ جو کار کے چاروں طرف اور اس کے چھت (جس کا اگلا حصہ ایک فلیٹ کی شکل کا ہے۔ جس کو موڑا جاسکے) کو پوری طرح ڈھک سکے۔ بنا کر پورا کرنا چاہتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ سلائی کا مارجن بہت کم ہے اس لیے اس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ سائبان بنانے کے لیے اسے کتنی تار پولین درکار ہے جب کہ اس کی اونچائی 2.5m اور قاعدہ کے ابعاد 4m × 3m تھیں۔

13.3 ایک قائم دائری استوانہ کا سطحی رقبہ (Surface Area of a Right Circular Cylinder)

اگر ہم کاغذ کی کچھ دائری شیٹ لیں اور ان کو ایک کے اوپر ایک رکھ کر ایک بنڈل بنائیں جیسا کہ مستطیل شیٹ کے ساتھ کیا تھا، تو





شکل 13.7

آپ کو کیا حاصل ہوتا ہے۔ (شکل 13.6 دیکھیے)

اگر اس بنڈل کو عمودی طور پر رکھیں تو ہمیں ایک قائم دائری استوانہ حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ اس کو زاویہ قائمہ پر رکھا گیا ہے اور اس کا قاعدہ دائری شکل کا ہے۔ آئیے دیکھیں کہ کس قسم کا استوانہ قائم دائری نہیں ہوتا۔

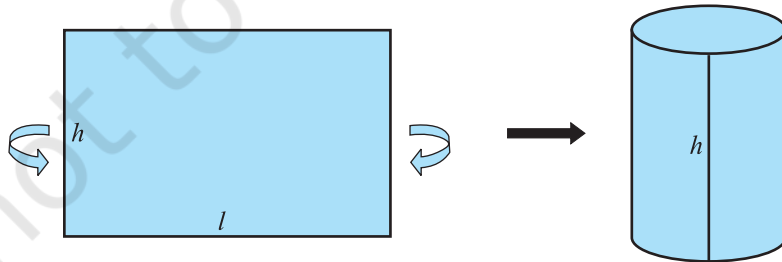
شکل 13.7(a) میں آپ ایک استوانہ دیکھ رہے ہیں جو

یقیناً دائری ہے لیکن یہ قاعدہ پر قائم زاوی نہیں ہے اس لیے ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ یہ قائم دائری استوانہ ہے۔

اور اسی طرح سے اگر قاعدہ دائری نہ ہو جیسا کہ آپ شکل 13.7(b) میں دیکھ رہے ہیں تب ہم اس کو قائم دائری استوانہ نہیں کہہ سکتے۔

ریمارک: یہاں ہم صرف قائم دائری استوانہ کا تذکرہ کریں گے اس لیے جب تک کہ وضاحت نہ کی جائے لفظ استوانہ سے مراد قائم دائری استوانہ ہی ہوگا اب اگر ایک استوانہ کو رنگین کاغذ سے ڈھکا جائے ایسا ہم کم سے کم کاغذ سے کیسے کر سکتے ہیں؟ پہلے کاغذ کی ایک مستطیل نما کاغذ کی شیٹ لیتے ہیں جس کی لمبائی استوانہ کے چاروں طرف سے ڈھک لے اور اس کی چوڑائی استوانہ کی اونچائی کے برابر ہو جیسا کہ شکل 13.8 میں دکھایا گیا ہے۔

شیٹ کا رقبہ ہمیں استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ دیتا ہے۔ نوٹ کیجیے کہ شیٹ کی لمبائی استوانہ کے دائرہ قاعدہ کے محیط کے برابر ہے جو $2\pi r$ کے برابر ہے۔



شکل 13.8

اس لیے، استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ ہے

$$= \text{مستطیل شیٹ کا رقبہ} = \text{لمبائی} \times \text{چوڑائی}$$

$$= \text{استوانہ کے قاعدہ کا محیط} \times h$$

$$= 2\pi r \times h$$

اس لیے،

$$\text{استوانہ کا کل سطحی رقبہ} = 2\pi r(r+h)$$

جہاں r استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ہے اور h استوانہ کی اونچائی ہے۔

ریمارک: استوانہ کے لیے، جب تک وضاحت نہ کی جائے: استوانہ کا نصف قطر

سے مراد

استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

اگر استوانہ کی اوپری اور نچلی سطح کو بھی ڈھکنا ہو تب ہمیں دو دائروں کی ضرورت ہوتی ہے (درحقیقت دائری خطوں کی) جس میں ہر ایک کا نصف قطر r ہو اور اس طرح سے ہر ایک

کا رقبہ πr^2 (شکل 13.9 دیکھیے) اس سے ہمیں کل سطحی رقبہ حاصل ہوتا ہے

$$2\pi r h + 2\pi r^2 + 2\pi r(r+h)$$

جہاں h استوانہ کی اونچائی اور اس کا نصف قطر ہے۔

$$\text{اس لیے، استوانہ کا کل سطحی رقبہ} = 2\pi r(r+h)$$

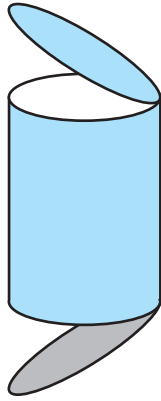
ریمارک: باب 1 میں آپ نے پڑھا تھا کہ π ایک غیر ناطق عدد ہے تو π کی قدر ایک غیر ختم اور غیر π اعشاریہ ہے۔

جب تحسیب میں ہم اس کی قدر کو استعمال کرتے ہیں تو ہم اکثر اس کو تقریباً $\frac{22}{7}$ یا 3.14 لیتے ہیں اور اس کو لکھتے $\pi = \frac{22}{7}$ یا

$$\pi = 3.14$$

مثال کے طور پر اگر ہمیں استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کرنا ہو جس کا نصف قطر 2.1 m اور اونچائی 3 m ہو تب $\pi = \frac{22}{7}$ لینے پر

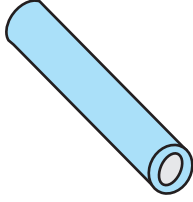
ہمیں حاصل ہوتا ہے۔



شکل 13.9

$$2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 3m^2 = 39.6m^2$$

مثال 3: ساوتری اپنے سائنس کے پروجیکٹ کے لئے استوانہ شکل کے کیلیڈواسکوپ (Kaleidoscope) کا موڈل بنانا چاہتی ہے وہ کیلیڈواسکوپ کی خمیدہ سطح کے لئے چارٹ پیپر کا استعمال کرنا چاہتی ہے۔
 شکل 13.10 دیکھیے۔ اگر وہ 25cm لمبا اور 3.5cm نصف قطر والا کیلیڈواسکوپ بنانا چاہتی ہو تو اسے درکار چارٹ پیپر کا رقبہ کیا ہوگا؟ آپ $\pi = \frac{22}{7}$ لے سکتے ہیں۔



شکل 13.10

حل: استوانہ کیلیڈواسکوپ کے قاعدہ کا نصف قطر $r = 3.5m$

کیلیڈواسکوپ کی اونچائی $h = 25m$

مطلوبہ چارٹ پیپر کا رقبہ = کیلیڈواسکوپ کی خمیدہ سطح کا رقبہ

$$= 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25cm^2$$

$$= 5500cm^2$$

مشق 13.2

جب تک کچھ اور نہ دیا ہوا ہو $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

1. 14cm اونچائی والے ایک قائم دائروں استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $88cm^2$ ہے۔ استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

2. دھات کی شیٹ کی 1m اونچائی والی ایک بند استوانہ شکل کی ٹینکی بنانا مطلوب ہے اگر اس کے قاعدہ کا قطر 140cm ہو۔ اس کے لئے کتنے مربع میٹر شیٹ درکار ہوگی؟

3. دھات کا ایک پائپ 77cm لمبا ہے۔ اس کا اندرونی قطر 4cm اور باہری قطر 4.4cm ہے (شکل 13.11 دیکھیے)

اسکی (i) اندرونی خمیدہ سطح کا رقبہ

(ii) باہری خمیدہ سطح کا رقبہ

(iii) کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔



شکل 13.11

4. ایک رولر کا قطر 84cm ہے اور اسکی لمبائی 120cm، ایک کھیل کے میدان کو ایک مرتبہ ہموار کرنے کے لیے پورے 500 چکر لگانے پڑتے ہیں کھیل کے میدان کا m^2 میں رقبہ معلوم کیجیے۔

5. استوانہ شکل کا پلر کا قطر 1.5cm اور اونچائی 3.5cm ہے۔ 12.50 روپیہ فی مربع میٹر کی شرح سے اس کی خمیدہ سطح کو پینٹ کرانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

6. ایک قائم دائری استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $4.4 m^2$ ہے اگر استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 0.7m ہے تو اس کی اونچائی معلوم کیجیے۔

7. ایک کنویں (دائری) کا اندرونی قطر 3.5m ہے۔ یہ 10m گہرا ہے۔ (i) اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (ii) 40 روپیہ فی مربع کی شرح سے اسکی خمیدہ سطح کا پلاسٹر کروانے کا خرچ معلوم کیجیے۔

8. ایک گرم پانی کے حرارتی نظام (Hoting System) 28m لمبا ایک استوانہ پائپ ہے۔ جس کا قطر 5cm ہے اس نظام کی کل (Radiating) سطح معلوم کیجیے۔

9. معلوم کیجیے

(i) ایک ٹنکی میں پٹرول جمع کیا جاتا ہے کی خمیدہ سطح کا رقبہ جب کہ اسکا قطر 4.2m اور اونچائی 4.5m

(ii) اس میں درحقیقت کتنی اسٹیل استعمال ہوئی اور اگر بند ٹنکی بنانے میں استعمال اسٹیل کا $\frac{1}{2}$ برباد ہو گیا ہو۔



شکل 13.12

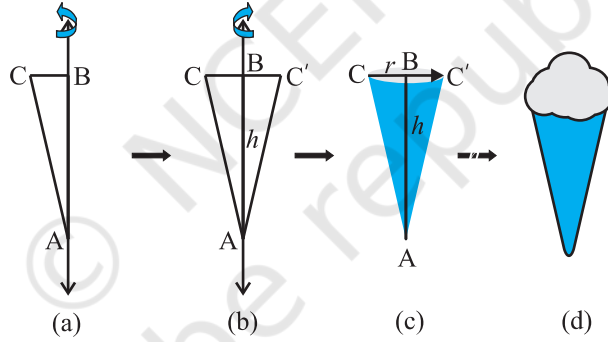
10. شکل 13.2 میں لیمپ شیڈ کا فریم دکھ رہے ہیں۔ اس کو ہمیں ایک سجاوٹی کپڑے سے ڈھکنا ہے۔ فریم کے قاعدہ کا قطر 20cm اور اونچائی 30cm ہے۔ کپڑے میں 2.5m کا مارجن دیا جائے تاکہ اسکی فریم کے اوپری اور نچلے حصہ پر موڑ سکیں۔ لیمپ شیڈ کو ڈھکنے کے لیے کتنا کپڑا درکار ہے۔

11. اسکول کے کچھ طلبا نے گتے کو استعمال کر کے استوانہ شکل کے سجاوٹی پن ہولڈر (Pen Holder) بنانے کے ایک مقابلہ میں حصہ لینے والوں کے لیے گتہ مہیا کرنا اسکول کی ذمہ داری ہے۔ اگر مقابلہ میں حصہ لینے والوں کی تعداد 35 ہو تو مقابلہ کے لیے کتنا گتہ خریدنا پڑے گا۔

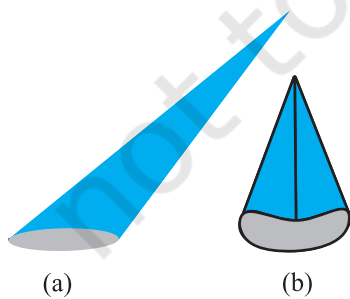
13.4 ایک قائم دائری مخروط کا سطحی رقبہ (Surface area of a Right Circular Cone)

اب تک ہم متماثل اشکال کو اکٹھا کر کر ٹھوس اشیاء بنا رہے تھے۔ یہ تمام اشکال منشور کہلاتی ہیں۔ آئیے اب ایک اور قسم کے ٹھوس پر غور کرتے ہیں۔ جو منشور نہ ہو۔ (اس قسم کے ٹھوس احرام Pyramids کہلاتے ہیں) آئیے ہم دیکھتے ہیں کہ ان کی تشکیل کیسے ہوتی ہے۔

سرگرمی: ایک قائم زاوی مثلث ABC جو B پر قائم ہے۔ کاٹے، مثلث کے عمودی ضلعوں میں سے ایک کے ساتھ (AB کے) ایک موٹا سادھا گاہک پیسٹ Paste کیجیے شکل 13.13(a) دیکھیے۔ دھاگا کو اپنے دونوں ہاتھوں سے مثلث کے دونوں طرف سے پکڑ کر مثلث کو دھاگے کے ساتھ کئی مرتبہ گھمائیے۔ ایسا کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا آپ اس شکل کو پہچان سکتے ہیں جو مثلث دھاگے کے ارد گرد سے بناتا ہے۔ (شکل 13.13(b) دیکھیے)؟ کیا یہ عمل آپ کو اس وقت کی یاد نہیں دلاتا جب آپ نے اس میں شکل کے ایک برتن میں آئس کریم کھائی تھی (شکل (c) اور 13.13(d) دیکھیے)؟



شکل 13.13



شکل 13.14

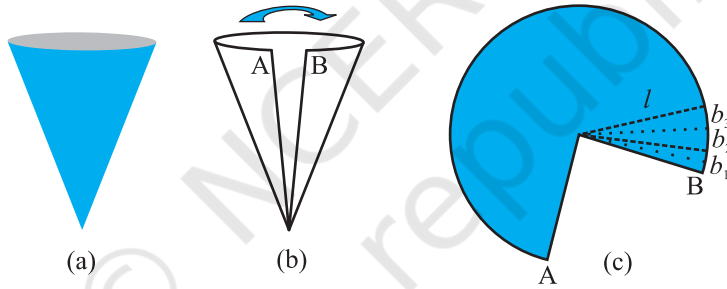
یہ ایک قائم دائری مخروط کہلاتا ہے۔ (شکل 13.13(c) میں دکھائی گئی شکل ایک قائم دائری استوانہ ہے جس میں نقطہ A راس کہلاتا ہے۔ اور AB اس کی اونچائی BC نصف قطر اور AC مخروط کی ترچھی اونچائی یہاں B مخروط کے دائرہ قاعدہ کا مرکز ہے۔ مخروط کی اونچائی نصف قطر اور اونچائی کو بالترتیب 1 اور 2 سے ظاہر کرتے ہیں۔ آئیے ایک بار پھر دیکھتے ہیں کہ کونسا مخروط دائرہ مخروط نہیں ہے۔ کیونکہ (a) میں راس کو قاعدہ کے مرکز سے ملانے والا خط، قاعدہ پر

قائم زاویہ نہیں بناتا اور شکل (b) میں قاعدہ دائرہ نہیں ہے۔

استوانہ ہی کی طرح، کیونکہ ہر صرف قائم دائری مخروط کے بارے میں پڑھیں گے۔ یاد رکھیے اس باب میں مخروط سے ہماری مراد قائم دائری مخروط ہے۔

سرگرمی: (1) ایک صاف ستھرے پیپر کے ایک مخروط کو اس کے ایک ضلع کے ساتھ اس طرح کاٹتے ہیں کہ پیپر تہہ وبالا (Overlap) نہ ہو۔ اس کے کھولنے پر آپ پیپر کی وہ شکل دیکھتے ہیں جو مخروط کی سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ وہ خط جن پر سے آپ مخروط کو کاٹتے ہیں مخروط کی ترچھی اونچائی کہلاتی ہے اور اس کو ہم l سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ایک گول کیک کے حصہ جیسے نظر آتا ہے۔

(ii) اگر آپ A اور B پارک گئے اضلاع کی ٹیپ کو ایک ساتھ رکھیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل (c) 13.15 کی خمیدہ سطح مخروط کے دائرہ قاعدہ کی تشکیل کرتا ہے۔



شکل 13.15

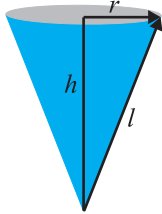
(iii) اگر شکل (c) 13.15 کی شکل والے پیپر کو نقطہ O سے کھینچے جانے والے خطوں کے ساتھ سیکڑوں چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں کاٹا جائے تو ایسا ہر حصہ ایک چھوٹا مثلث ہوگا۔ جس کی اونچائی مخروط کی ترچھی اونچائی l ہوگی۔

(iv) اب ہر ایک مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}$ ہر ایک مثلث کا قاعدہ $l \times$ ۔

اس لیے، پورے پیپر کا رقبہ

= تمام مثلثوں کے رقبہ کا حاصل جمع

$$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \dots = \frac{1}{2} l (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) =$$



شکل 13.16

$$= \frac{1}{2} \times l \times \text{کی پوری خمیدہ باؤنڈری کی لمبائی} (13.15(c)) =$$

$$= \text{کیونکہ } b_1 + b_2 + b_3 + \dots \text{ شکل کی خمیدہ کی سطح کی تشکیل کرتے ہیں۔}$$

لیکن شکل کا خمیدہ مخروط کے قاعدہ کا احاطہ بنانا ہے اور مخروط کے قاعدہ کا محیط $(=2\pi r)$ ہے

$$\text{اس لیے، مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ} = \pi r l = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r$$

جہاں r اسکے قاعدہ کا نصف قطر اور l اسکی ترچھی اونچائی۔

نوٹ کیجیے کہ $l^2 = r^2 + h^2$ (جیسا کہ شکل 13.16 میں دیکھا جاسکتا ہے۔)،

فیثاغورث کے مسئلہ کو استعمال کرنے پر یہاں h مخروط کی اونچائی ہے۔

$$\text{اس لیے } l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

اب اگر مخروط کا قاعدہ نہ ہو تو r نصف قطر والا ایک دائری پیپر اور چاہیے جب کہ رقبہ πr^2

$$\text{اس لیے، مخروط کا کل سطحی رقبہ} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

مثال 4: ایک مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے کل ترچھی اونچائی 10cm اور قاعدہ کا نصف قطر 7cm

$$\text{حل: خمیدہ سطح کا رقبہ} = \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ cm}^2$$

$$= 220 \text{ cm}^2$$

مثال 5: ایک مخروط کی اونچائی 16cm اور قاعدہ کا نصف قطر 12cm ہے تو مخروط کی خمیدہ سطح اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

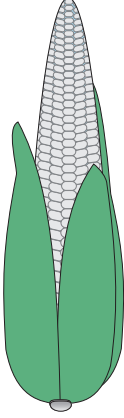
$$\text{حل: یہاں، } h = 16 \text{ cm اور } r = 12 \text{ cm}$$

$$\text{اس لیے، } l^2 = h^2 + r^2$$

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$\text{اس لیے، خمیدہ سطح کا رقبہ} = \pi r l$$

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ cm}^2 = 753.6 \text{ cm}^2$$



شکل 13.17

$$\pi r l + \pi r^2 = \text{کل سطحی رقبہ}$$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ cm}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ cm}^2 = 1205.76 \text{ cm}^2$$

مثال 6: ایک بھٹا (شکل 13.17 دیکھیے) کی شکل تقریباً ایک مخروط کی طرح ہے جس کے

چوڑے سرے کا نصف قطر 2.1 cm اور لمبائی (اونچائی) 20 cm ہے اگر بھٹے کی ہر 1 cm سطح

میں 4 دانے ہوں تو بتائیے پورے بھٹے میں کل کتنے دانے ہیں۔

حل: کیونکہ بھٹے کے دانے صرف اس کی خمیدہ سطح پر پائے جاتے ہیں۔ اس لیے ہمیں اس کی

خمیدہ سطح کا رقبہ جاننے کی ضرورت ہے اور اس پر موجود دانوں کی تعداد کی اس سوال میں

ہمیں مخروط کی اونچائی دی ہوئی ہے۔ اس لیے ہمیں اس کی ترچھی اونچائی معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2} \text{ cm}$$

$$\sqrt{404.41} \text{ cm} = 20.11 \text{ cm}$$

اس لیے، بھٹے کی خمیدہ سطح کا رقبہ $\pi r l =$

$$= \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11 \text{ cm}^2 = 132.726 \text{ cm}^2 = 132.73 \text{ cm}^2 \text{ تقریباً}$$

$$1 \text{ cm}^2 \text{ سطح پر دانوں کی تعداد ہے } = 4$$

اس لیے پوری خمیدہ سطح پر دانوں کی تعداد ہوگی۔

$$132.73 \times 4 = 530.92 = 531 \text{ تقریباً}$$

اس لیے، بھٹے پر تقریباً 531 دانے ہونگے۔

مشق 13.3

جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

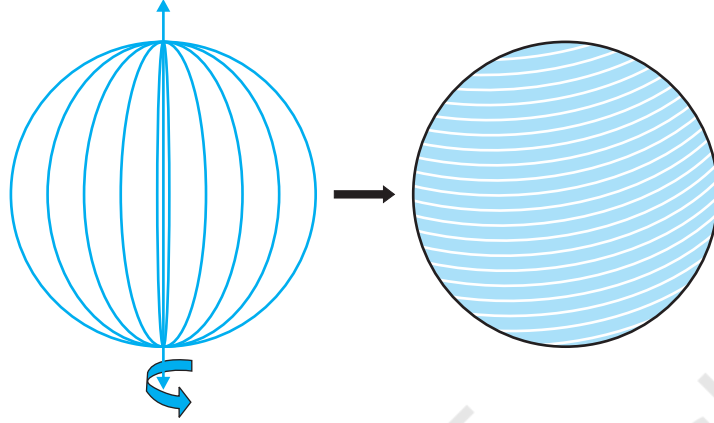
1. ایک مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر 10.5 cm ہے اور اس کی اونچائی 10 cm۔ اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

2. ایک مخروط کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے اگر اس کی ترچھی اونچائی 9m اور قاعدہ کا قطر 24cm ہے
3. ایک مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ 308cm^2 اور اس کی ترچھی اونچائی 14cm ہے اس کا (i) قاعدہ کا نصف قطر اور (ii) اور مخروط کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔
4. ایک مخروط نما ٹینٹ کی اونچائی 10m ہے اور قاعدہ کا نصف قطر 24m ہے تو اس کی (i) ترچھی اونچائی معلوم کیجیے (ii) ستر روپیہ فی مربع میٹر کی شرح سے ٹینٹ میں استعمال ہونے والے کینوس کا خرچ معلوم کیجیے۔
5. ایک مخروطی ٹینٹ جس کی اونچائی 8m اور قاعدہ کا نصف قطر 6m ہے۔ بتانے کے لیے 3m چوڑی کتنی تار پولین درکار ہے؟ یہ فرض کرتے ہوئے کہ سلامی میں اور کائٹے میں ضائع ہونے والی کل تار پولین تقریباً 20cm ہے ($\pi=3.14$) استعمال کیجیے۔
6. ایک مخروطی گنبد کی ترچھی اونچائی اور قاعدہ کا قطر بالترتیب 25m اور 14m ہے۔ 210 روپیہ فی میٹر 100m^2 کی شرح سے اس کی خمیدہ سطح کو سفیدی کرانے کا کل خرچ معلوم کیجیے۔
7. جو کر کی ایک ٹوپی قائم دائری مخروط کی شکل کی ہے۔ جس کے قاعدہ کا نصف قطر 7cm اور اونچائی 24cm ہے ایسی دس ٹوپیاں بنانے میں درکار ٹینٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔
8. ایک بس اسٹاپ کو سڑک کے باقی حصہ سے الگ کرنے کے لیے گتے کے لیے 50 کھوکھلے مخروط استعمال کیے گئے ہیں ہر ایک مخروط کے قاعدہ کا قطر 40cm اور اونچائی 1m ہے اگر ہر ایک مخروط کی باہری سطحوں کو 12 روپیہ فی مربع میٹر (m^2) کی شرح سے پینٹ کیا جائے تو تمام مخروطوں کو پینٹ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجیے؟

($\pi=3.14$ اور $\sqrt{1.04}=1.02$) استعمال کیجیے۔

13.5 کرہ کا سطحی رقبہ (Surface Area of a Sphere)

کرہ کیا ہے؟ کیا ایسا ہی ہے جیسے دائرہ؟ کیا آپ دائرہ کو پیپر پر بنا سکتے ہیں۔؟ ہاں آپ بنا سکتے ہیں۔ کیونکہ دائرہ ایک بند مستوی شکل ہے۔ جو ایک متعین (Fix) نقطہ سے یکساں فاصلہ پر موجود نقطوں سے بنی ہے۔ جس میں متعین نقطہ دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔ اب اگر آپ ایک دائری ڈسک کے قطر کے ساتھ ایک دھاگا پیسٹ کریں اور اسکو گھمائیں جیسا کہ آپ نے پچھلے سیکشن میں مثلث کو گھمایا تھا۔ آپ کو ایک ٹھوس نظر آئے گا (شکل 13.18 دیکھیے) یہ کس سے مشابہت رکھتا ہے؟ ایک گیند ہے؟ یہ کرہ کہلاتا ہے۔



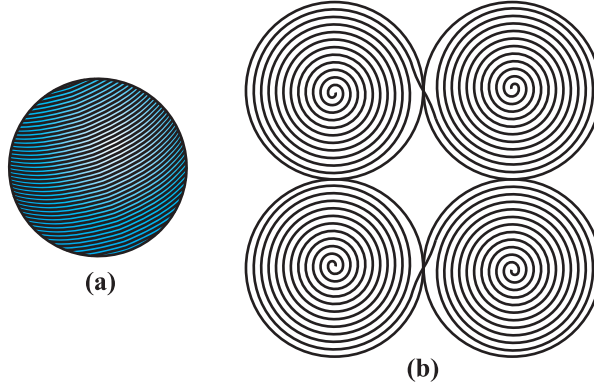
شکل 13.18

کیا آپ اندازہ کر سکتے ہیں کہ دائرہ کے مرکز کا کیا ہوتا ہے۔ جب یہ گھوم کر کرہ بناتا ہے۔؟ یقیناً یہ کرہ کا مرکز بن جاتا ہے۔ اس طرح سے کرہ ایک تین شکل ہے جو فضا میں ان تمام نقطوں سے مل کر بنی ہے جو ایک متعین نقطہ، جو کرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔ اسے یکساں فاصلہ جو نصف قطر کہلاتا ہے پر واقع ہوں۔

نوٹ: ایک کرہ گیند کی سطح جیسا ہوتا ہے۔ لفظ ٹھوس کرہ اس ٹھوس کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ جس کی سطح کروی ہو۔

سرگرمی: کیا آپ نے کبھی کسی لٹو سے کھیلے ہیں یا آپ نے کبھی کسی کو اس سے کھیلنے دیکھا ہے۔؟ آپ جانتے ہو گئے کہ کس طرح سے اس کے چاروں طرف دھاگا لپیٹا جاتا ہے۔ آئیے بڑی ایک گیند لیتے ہیں اور اس میں ایک کیل لگاتے ہیں۔ کیل کے سہارے گیند کے چاروں طرف دھاگا لپیٹتے ہیں جب آپ گیند کے آخری حصہ تک پہنچ جائیں تو دھاگا کو اپنی جگہ پر روک رکھنے کے لیے پن لگائیں اور گیند کے باقی حصہ پر دھاگا لپیٹنا جاری رکھیں۔ جب تک آپ گیند پوری طرح سے نہ ڈھک لیں (شکل 13.19(a) دیکھیے) دھاگا کے ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر مارک کیجیے اور ابتدائی گیند کی سطح سے دھاگا کو ہٹائیں۔ اب اپنے استاد سے گیند کے قطر کو ناپنے کے لیے مدد لیجیے۔ جس سے آپ اس کا نصف قطر آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں اور پھر کاغذ کی ایک شیٹ پر گیند کے نصف قطر کے مساوی نصف قطر والے چار دائرہ بنائیے۔ ایک ایک کر کے ان دائروں پر وہ دھاگا لپیٹتے جو آپ نے گیند پر لپیٹا تھا۔ (شکل 13.19(b) دیکھیے)۔

اس طرح سے آپ نے کیا حاصل کیا؟



شکل 13.19

وہ دھاگہ جس سے کرہ کی پوری سطح کو ڈھک لیا تھا۔ چاروں دائرہ کے پورے خطہ کو بھر لیا۔ جس کے نصف قطر کرہ کے نصف قطر کے برابر ہیں۔ اس کا کیا مطلب ہے۔؟ اس سے پتہ چلتا ہے کہ کرہ کا سطحی رقبہ جس کا نصف قطر r

$$= \text{نصف قطر والے دائرہ کے رقبہ کا } 4 \text{ گنا} \quad r = 4 \times (\pi r^2)$$

$$\text{اس لیے، کرہ کا سطحی رقبہ} = 4\pi r^2$$

جہاں r کرہ کا نصف قطر ہے۔

کرہ کی سطح پر آپ کتنے رخ دیکھتے ہیں؟ صرف ایک جو خمیدہ ہے۔

آئیے اب ایک ٹھوس کرہ لیتے ہیں۔ اور ایک مستوی جو اس کے مرکز سے گزرتی ہے سے اسکو بیچ سے کاٹتے ہیں۔ کرہ کیسا ہو گیا؟

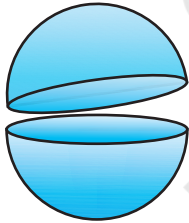
ہاں، یہ دو مساوی حصوں میں منقسم ہو گیا۔ (شکل 13.20 دیکھیے) ہر نصف حصہ کو کیا کہتے ہیں؟ یہ ایک نصف کرہ کہلاتا ہے۔

اور نصف کرہ کی سطح کے بارے میں کیا خیال ہے۔ اس میں کتنے رخ ہیں۔؟ دو ایک خمیدہ سطح ہے اور ایک فلت رخ۔

نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا (یہ کرہ کی خمیدہ سطح کے رقبہ کا آدھا ہے۔ جو $4\pi r^2$ کا $\frac{1}{2}$ ہے۔

$$\text{اس لیے، نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ} = 2\pi r^2$$

جہاں r اس کرہ کا نصف قطر ہے۔ جس کا نصف کرہ ایک حصہ ہے۔



شکل 13.20

اب نصف کرہ کے دونوں رخوں کو لینے پر اس کا سطحی رقبہ ہے $2\pi r^2 + \pi r^2$
اس لیے، نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ $3\pi r^2$

مثال 7: 7cm نصف قطر والے کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: 7cm نصف قطر والے کرہ کا سطحی رقبہ ہے۔

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \text{ cm}^2 = 616 \text{ cm}^2$$

مثال 8: (i) خمیدہ سطح کا رقبہ (ii) اور 21cm نصف قطر والے نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: 21cm نصف کرہ کا خمیدہ سطح کا رقبہ کیا ہوگا۔

$$2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 2772 \text{ cm}^2$$

(ii) نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ ہوگا۔

$$3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 4158 \text{ cm}^2$$

مثال 9: ایک کھوکھلا کرہ جس میں اور موٹر سائیکل سوار ڈرائیونگ کے کرتب دکھاتا ہے، کا قطر 7m ہے۔ موٹر سائیکل کی ڈرائیونگ کے لیے دستیاب رقبہ معلوم کیجیے۔

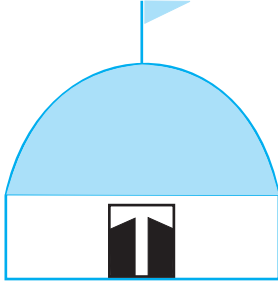
حل: کرہ کا قطر 7m ہے اس لیے نصف قطر 3.5m ہے اس لیے موٹر سائیکل کے لیے دستیاب جگہ کرہ کا سطحی رقبہ ہے۔ جو ہے

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ m}^2 \\ = 154 \text{ m}^2$$

مثال 10: اسٹوپا کے نصف کرہ کی گنبد کو پینٹ کرانا ہے۔ (شکل 13.21) دیکھیے اگر گنبد کے قاعدہ کا نصف قطر 176m ہے تو 5 روپے فی 100cm کی شرح سے اس کے اوپر پینٹ کرنے کا خرچہ معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ گنبد کے گول حصہ پر پینٹ ہونا ہے۔ اس لیے ہمیں نصف کرہ کی خمیدہ سطح کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ تاکہ

ہمیں پتہ چل سکے کہ کتنے حصہ پر پینٹ ہونا ہے۔ اب گنبد کا محیط ہے 17.6cm اس لیے، $17.6 = 2\pi r$



شکل 13.21

$$= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22} \text{ m} = 2.8 \text{ m} = \text{گنبد کا نصف قطر ہوگا}$$

$$2\pi r^2 = \text{گنبد کی خمیدہ سطح کا رقبہ}$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \text{ m}^2 =$$

$$49.28 \text{ m}^2 =$$

اب، 100 cm^2 رقبہ کے پینٹ کا خرچ ہے 5 روپے۔

اس لیے، پینٹ کرانے کا خرچ ہے 500 روپے

$$\text{Rs } 500 \times 49.28 = \text{پورے گنبد کو پینٹ کرانے کا خرچ} \\ = \text{Rs } 24640$$

مشق 13.4

جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

1. کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔ اگر اس کے نصف قطر

(i) 10.5 cm (ii) 5.6 cm (iii) 14 cm ہوں۔

2. کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔ اگر اس کے قطر

(i) 14 cm (ii) 21 cm (iii) 3.5 cm ہوں۔

3. 10 cm نصف قطر والے نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

4. ایک کرہ غبارہ میں ہوا بھرنے سے اس کا نصف قطر 7 cm سے 14 cm ہو جاتا ہے۔ ان دو حالتوں میں غبارہ کی سطحی رقبوں

کی نسبت معلوم کیجیے۔

5. پینل کے ایک نصف کرہ پیالا کا اندرونی قطر 10.5 cm ہے۔ 16 روپیہ فی 100 cm^2 کی شرح سے اس کے اندر کی طرف

(Tin-Plating) کا خرچ معلوم کیجیے۔

6. ایک کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے اگر اس کا سطحی رقبہ 154 cm^2 ہے۔

7. چاند کا قطر زمین کے قطر کا تقریباً ایک چوتھائی ہے۔ اس کے سطحی رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

8. ایک نصف کروی پیالہ 0.25cm موٹے ایک اسٹیل کا بنا ہوا ہے۔ پیالہ کا اندرونی قطر 5cm ہے۔ پیالے کے باہری خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

9. R نصف قطر والا ایک کرہ ایک قائم دائری استوا کے اندر پوری طرح فکس ہے۔ (شکل 13.22 دیکھیے)



(i) کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

(ii) استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(iii) (i) اور (ii) میں حاصل رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

شکل 13.22

13.6 کعب نما کا حجم (Volume of a Cuboid)

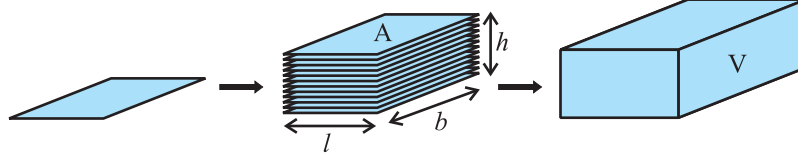
کچھلی جماعتوں میں آپ کچھ اشکال کے حجم کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ یاد کیجیے کہ ٹھوس اشیاء جگہ گھیرتی ہیں۔ اس گھری ہوئی جگہ کی پیمائش کو شے کا حجم کہتے ہیں۔

نوٹ: جب ایک شے ٹھوس ہو تو اس کے ذریعے گھیری جگہ کی پیمائش کو اس شے کا حجم کہتے ہیں۔ اور دوسری طرف اگر شے کھوکھلی ہے۔ تب اس کا اندرون خالی ہوتا ہے۔ اور اس میں ہوا بھری جاسکتی ہے۔ یا کوئی مائع جو اسی شے کی شکل اختیار کر لیتی ہے۔ اس حالت میں مادہ کا حجم جو اس کے اندرون کو پوری طرح بھر دیتا ہے۔ اس شے کی گنجائش کہلاتی ہے۔ مختصراً کسی شے کے ذرائع گھیری گئی جگہ کی پیمائش اس کا حجم ہوتی ہے۔ اور کسی شہ کی گنجائش اس کے اندرون میں اس مادہ کے حجم کے برابر ہوتی ہے۔ جو اس کو پوری طرح بھر دیتا ہو۔ اس لیے ان میں ہر ایک کی اکائی مکعب اکائی ہے۔

اس لیے، جب ہم کعب نما کے حجم کے بارے میں بات کریں تو ہم اس کعب نما سے گھری ہوئی جگہ کی پیمائش پر غور کرتے ہیں۔

مزید، رقبہ اور حجم کی پیمائش کسی خطہ کی قدر کے طور پر کی جاتی، اور اگر ٹھیک کہیں تو ہم ایک دائرہ کی خطہ کا رقبہ یا ایک کعب نما حصہ کا حجم یا کروی خطہ کا حجم وغیرہ معلوم کرتے ہیں لیکن صرف آسانی کے لیے ہم دائرہ کا رقبہ، کعب نما یا کرہ کا حجم حالانکہ یہاں مراد صرف اس کی باؤنڈری ہوتی ہے۔

شکل 13.23 کا مشاہد کیجیے۔ مان لیجیے ہر ایک مستطیل کا رقبہ A ہے۔ اور جس اونچائی تک مستطیلوں کو اکٹھا کیا گیا ہے۔ اس h سے ظاہر کریں۔ اور کعب نما کے حجم کو v سے۔ تب کیا آپ A، h اور v کے درمیان کوئی تعلق بنا سکتے ہیں۔



شکل 13.23

ہر ایک مستطیل کے ذرائع گھیرے مستوی خطہ کا رقبہ $\times$ اونچائی

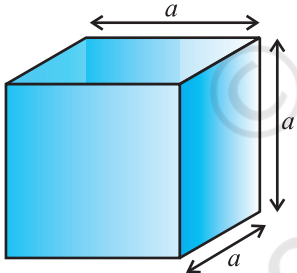
= کعب نما کے ذرائع گھری ہوئی جگہ کی پیمائش

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $V = A \times h$

یعنی کہ، **اونچائی $\times$ چوڑائی $\times$ لمبائی = قاعدہ کا رقبہ = کعب کا حجم**

یا $l \times b \times h$ اور بالترتیب کعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کی ہے۔

نوٹ: جب ہم خلاء (Space) میں کسی خطہ کی قدر کی پیمائش کرتے ہیں یعنی ایک ٹھوس کے ذرائع گھیری گئی جگہ کی ایسا ہم اکائی کنارہ والے مکعبوں کی گنتی سے کرتے ہیں جو اس میں پوری طرح سے فٹ ہو جائیں۔ اس لیے حجم کی اکائی مکعب اکائی ہوتی ہے۔



شکل 13.24

زیادہ $a^3 = \text{کنارہ} + \text{کنارہ} + \text{کنارہ} = \text{کعب کا حجم}$

جہاں a کعب کا کنارہ ہے (شکل 13.24 دیکھتے ہیں)

اس لیے، اگر کسی مکعب کا کنارہ (اضلاع) 12 cm کا ہے،

تو اس کا حجم ہوگا $12 \times 12 \times 12\text{ cm}^3 = 1728\text{ cm}^3$

یاد کیجیے اس فارمولہ کو پچھلی کلاسوں میں پڑھ چکے ہیں۔ اس لیے اس فارمولہ کی وضاحت کے لیے کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 11: ایک کھلے میدان کے چاروں طرف ایک دیوار جن کی چوڑائی 10 cm بنائی ہے۔ دیوار کی اونچائی 4 cm اور موٹائی 24 cm ہے اگر دیوار $24\text{ cm} \times 12\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ ابعاد والی اینٹوں سے بنتی ہو تو کتنی اینٹیں درکار ہیں؟

حل: کیونکہ دیوار اینٹوں سمیت خلاء میں جگہ گھیرتی ہے اس لیے، لمبائی دیوار کا حجم معلوم کرنا ہے جو ایک کعب نما کی شکل کی ہے۔

یہاں، چوڑائی: $1000\text{cm} = 10\text{m}$

موٹائی $24\text{cm} =$

اونچائی $4000\text{cm} = 4\text{m}$

اس لیے، دیوار کا حجم = لمبائی $\times$ موٹائی $\times$ اونچائی

$$1000 \times 24 \times 400 =$$

کیونکہ، ہر ایک اینٹ لمبائی $= 24\text{cm}$ ، چوڑائی $= 12\text{cm}$ اور اونچائی $= 8\text{cm}$ میں کعب نما کی شکل کی ہوتی ہے

اس لیے، اینٹ کا حجم = لمبائی $\times$ چوڑائی $\times$ اونچائی

$$= 24 \times 12 \times 8 \text{ cm}^3$$

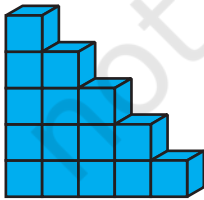
اس لیے، مطلوبہ اینٹوں کی تعداد = $\frac{\text{دیوار کا حجم}}{\text{ہر اینٹ کا حجم}}$

$$\frac{400 \times 24 \times 1000}{8 \times 12 \times 24}$$

$$4166.6 =$$

اس طرح، دیوار میں 4167 اینٹیں لگیں۔

مثال 12: ایک بچہ بلڈنگ بلاک سے کھیل رہا ہے جو مکعب کی شکل کے ہیں وہ ایک ایسا ڈھانچہ بناتا ہے جیسا شکل 13.29 میں دکھایا گیا ہے اگر ہر ایک مکعب کا کنارہ 3cm ہو تو بچے کے ذرائع بنائے گئے اس ڈھانچے (ساخت) کا حجم معلوم کیجیے۔



شکل 13.25

حل: ہر ایک مکعب کا حجم = کنارہ + کنارہ + کنارہ

$$3 + 3 + 3 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^3$$

ڈھانچے (ساخت) میں مکعبوں کی تعداد $= 15$

اس لیے، ڈھانچے کا حجم $= 27 \times 15 \text{ cm}^3 = 405 \text{ cm}^3$

مشق 13.5

1. ایک ماچس کی پیمائش؟ ہے ایسی 12 ماچسوں کو رکھنے والے پیکٹ کا حجم معلوم کیجیے۔
2. کعب نما پانی کی ٹنکی 6cm لمبی، 5cm چوڑائی اور 4.5cm گہری ہے۔ اس میں کتنے لیٹر پانی آئے گا؟ ($1\text{m}^3 = 1000\text{l}$)
3. ایک کعب نما برتن 1000 لمبا اور 8cm چوڑائی 380cm³ مائع کو رکھنے کے لیے اس کی اونچائی کتنی ہونی چاہئے۔
4. 30 روپے کی مکعب میٹر شرح سے 8cm لمبے، 6cm چوڑے اور 3cm گہرے گڈھے کو کھودنے کا خرچ معلوم کیجیے۔
5. ایک کعب نما ٹنکی کی گنجائش 50,000L (لیٹر) ٹنکی کی چوڑائی معلوم کیجیے اگر اس کی لمبائی اور گہرائی بالترتیب 2.5cm اور 10cm ہو۔
6. ایک گاؤں جن کی آبادی 4000 ہے اس کو فی آدمی 150 لیٹر پانی درکار ہے۔ اس میں $20\text{m} \times 15\text{m} \times 6$ پیمائش کی ایک ٹنکی ہے اس ٹنکی کا پانی کتنے دنوں تک چلے گا۔
7. ایک گودام کی پیمائش $10\text{cm} \times 25\text{cm} \times 40\text{cm}$ ہے $1.25 = +1.5\text{cm} \times 5\text{cm}$ پیمائش والے ان لکڑی کے کریٹوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد معلوم کیجیے جو اس گودام میں رکھی جاسکتی ہوں۔
8. 12cm ضلع کے ایک ٹھوس مکعب کو 8مادی حجم والے مکعبوں میں کاٹا گیا نئے مکعب کا ضلع کیا ہوگا؟ اور ان کے سطح رقبوں کے درمیان نسبت بھی معلوم کیجیے۔
9. 3m گہرا اور 40چوڑا ایک دریا 2km فی گھنٹہ کی مفرح سے بہہ رہا ہے۔ ایک منٹ میں سمندر میں کتنا پانی گرے گا۔

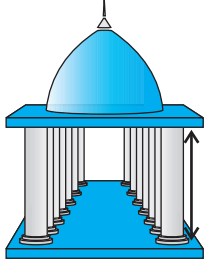
13.7 ایک استوانہ کا حجم (Volume a Cylinder)

جس طرح سے ایک ہی سائز کے مستطیلوں سے کعب نما بنا ہوتا ہے اسی طرح ایک ہی سائز کے دائروں سے استوانہ بنا ہوتا ہے۔ اس لئے اس بحثی دلائل کو استعمال کرتے ہوئے جو ہم نے کعب نما کے لئے دئے تھے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ایک استوانہ کا حجم: قاعدہ کا رتبہ $\times$ اونچائی ہوتا ہے

$$\pi r^2 h = \text{اونچائی} \times \text{دائری قاعدہ کا رتبہ}$$

$$\pi r^2 h = \text{استوانہ کا حجم}$$

جہاں r استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر اور h اس کی اونچائی ہے۔



شکل 13.26

مثال 13: ایک مندر کے ستون استوانہ کی شکل کے ہیں (شکل 13.26 دیکھیے) اگر ہر

ایک ستون کے قاعدہ کا شق قطر 200m اور دو تہائی 10m ہو تو اسے 14 ستون بنانے کے لئے کتنا کنکریٹ آمیزہ درکار ہوگا؟

حل: کیونکہ کنکریٹ آمیزہ جو ستون بنانے میں استعمال ہوگا اس لئے ستون کی ساری جگہ وہیں گھیر لے گا۔ یہاں ہمیں استوانہ کا حجم معلوم کرنے کی ضرورت ہوگی۔

$$20\text{cm} = \text{استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر}$$

$$10\text{m} = 1000\text{cm} = \text{استوانہ کی اونچائی}$$

$$\text{اس لئے، } \pi r^2 h = \text{ہر ایک استوانہ کا حجم}$$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ cm}^3$$

$$= \frac{8800000}{7} \text{ cm}^3$$

$$= \frac{8.8}{7} \text{ m}^3 \quad (1000000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ m}^3)$$

$$\text{اس لئے، } 14 \text{ ستونوں کا حجم} = \text{ہر ایک استوانہ کا حجم} \times 14$$

$$= \frac{8.8}{7} \times 14 \text{ m}^3$$

$$= 17.6 \text{ m}^3$$

اس لئے، 14 ستونوں کے لئے 17.6 m^3 کنکریٹ آمیزہ درکار ہوگا۔

مثال 14: رمضان کے میلہ میں کھانے کے بہت سے اسٹالوں میں ایک

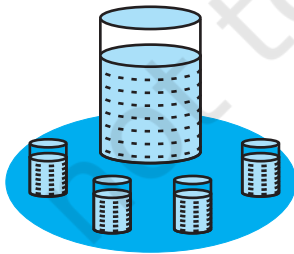
اسٹال کے مالک کے پاس 15a شق طرہ والا ایک استوانہ برتن ہے جس

میں 32a اونچائی تک سنترہ کا جوس بھرا ہوا ہے۔ جوس کو چھوٹے استوانہ گلاسوں

میں بھرا گیا جن کا نصف قطر 3a (شکل 13.27 دیکھیں) اور اونچائی 8m ہے اور

بھرے ہوئے گلاسوں کو 15 روپے ایک گلاس کے حساب سے فروخت کیا گیا۔

سارے سنترے کے جوس کو فروخت کر کے اسٹال کا مالک کتنی رقم وصول کریگا۔



شکل 13.27

حل: برتن میں جوس کا حجم

= استوانہ برتن کا حجم

$$\pi R^2 h =$$

(جہاں R اور H ترتیب برتن کا نصف قطر اور اونچائی کی ہے)

$$\pi \times 15 \times 15 \times 32 \text{ cm}^3 =$$

اسی طرح سے، ہر ایک گلاس میں آنے والے جوس کا حجم $\pi r^2 h$

اس لئے، فروخت کئے گئے جوس کے گلاسوں کی تعداد

برتن کا حجم

$$= \frac{\text{ہر ایک گلاس کا حجم}}{\text{برتن کا حجم}}$$

$$= \frac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$$

$$= 100$$

اس لئے اسٹال کے مالک نے رقم وصول کی $15 \times 100 =$

$$= 1500 \text{ روپیہ}$$

مشق 13.6

جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے

1. ایک استوانہ برتن کے قاعدہ کا محیط 1326 ہے اور اس کی اونچائی سے 25 اسی میں کتنے لیٹر پانی لگا ہے

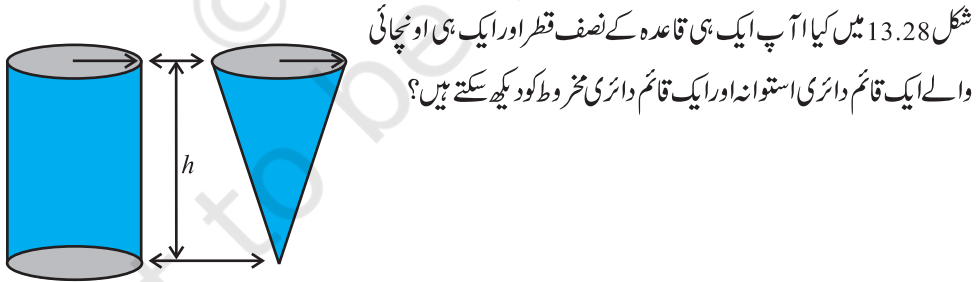
$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ l}$$

2. لکڑی کے ایک استوانہ پائپ کا اندرونی قطر 24a ہے اور باہری قطر 28.6 ہے پائپ کی لمبائی 35a ہے پائپ کی قیمت معلوم کیجیے اگر 1m لکڑی کی قیمت 0.6g ہو۔

3. ایک مشروب دو قسم کے پیکنٹ میں دستیاب ہیں (i) ایک ٹن کی کین جس کا قاعدہ 5m لمبا اور 4m چوڑا مستطیل کی شکل کا ہے۔ اس کی اونچائی 15m ہے (ii) ایک پلاسٹک کا استوانہ جس کے دائرہ قاعدہ کا قطر 7m اور اونچائی 10m کس پیکنٹ کی گنجائش زیادہ ہے اور کتنی۔

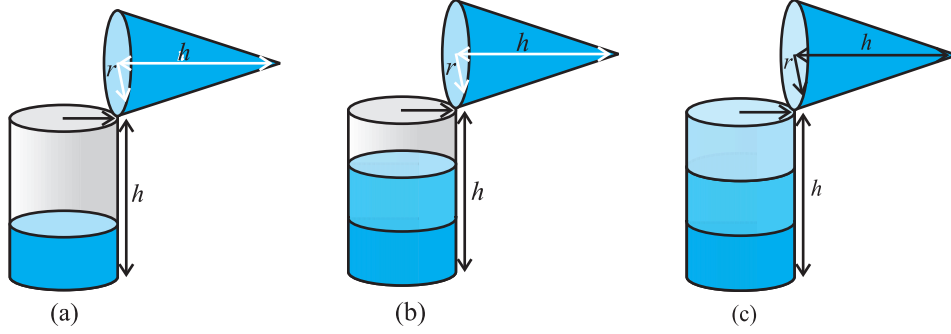
4. اگر کسی استوانہ کی خمیدہ سطح 94.2m ہے اور ان کی اونچائی 5m ہے تو اس کے
(i) قاعدہ کا نصف قطر (ii) استوانہ کا حجم معلوم کیجیے ($\pi=3.14$ استعمال کیجیے)
5. 100m گہرے ایک استوانہ برتن کی اندرونی خمیدہ سطح کو پینٹ کرنے کا خرچ 2200 روپے ہے اگر پینٹ کرانے کا خرچ 20 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے ہے تو معلوم کیجئے۔
(ii) تو برتن کا داخلی خمیدہ سطح کا رقبہ
(ii) قاعدہ کا نصف قطر
(iii) برتن کی گنجائش
6. 1m اونچے ایک بند استوانہ برتن کی گنجائش 15.4 لیٹر ہے اس کو بنانے میں کتنے مربع میٹر ڈاٹ کی شیٹ کی ضرورت ہوگی۔
7. لیٹر کی ایک پینل میں ایک لکڑی کا استوانہ اور اس کے اندر ایک ٹھوس گریفائٹ کا استوانہ بدلتا ہے پینل کا قطر 7m ہے اور گریفائٹ کا قطر 1m اگر پینل کی لمبائی 14cm جو تو لکڑی اور گریفائٹ کا حجم معلوم کیجئے۔
8. اسپتال میں مریض کو 7cm قطر والے ایک استوانہ شکل کے پیالہ میں سوپ دیا جاتا ہے اگر پیالہ سوپ سے 14cm اونچائی تک بھرا ہو تو 250 مریضوں کو دینے کے لئے اسپتال کو روزانہ اس ٹنکی کتنا سوپ بنانا پڑے گا؟

13.8 ایک قائم دائری مخروط کا حجم (Volume of a Right Circular Cone)



شکل 13.28

مشغلہ: ایک ہی نصف قطر (قاعدہ کا) اور ایک ہی اونچائی والے کھوکھلے استوانہ اور کھوکھلا مخروط بتانے کی کوشش کیجئے۔ پھر ہم ایک تجربہ کر سکتے ہیں جس سے ہمیں پیرسیکلنیل طور پر ایک قائم دائری مخروط کا حجم معلوم کرنے میں مدد ملے گی۔



شکل 13.29

اس لئے، اسے اس طرح سے شروع کرتے ہیں۔

مخروط کے کنارے تک اسے ریت سے بھر دیجئے اور اس کو استوانہ میں خالی کر دیجئے ہم دیکھیں گے کہ یہ اس کا کچھ حصہ بھرتا ہے [شکل (a) 13.29 دیکھیے]

ہم پھر کنارے تک ریت کو مخروط میں بھرتے ہیں اور اس کو استوانہ میں ڈال دیتے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ استوانہ ابھی تک پورا نہیں بھر [ل (b) 13.29 دیکھیے]

جب مخروط کو تیسری مرتبہ ریت سے بھر کر اس کو استوانہ میں ڈالا جاتا ہے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ استوانہ بھی اب کنارے تک پورا بھر گیا [دیکھیے شکل (c) 13.29]

اس تجربہ سے ہم اسانی سے یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں۔ مخروط جو گنا حجم استوانہ کا حجم ہوتا ہے جس کے قاعدہ کا نصف قطر اور اونچائی وہی ہو جو مخروط کی ہے اس کا مطلب ہے مخروط کا حجم استوانہ کے حکم کا ایک تہائی ہے۔

$$\text{اس لئے، } \text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r h$$

جہاں r مخروط کا نصف قطر اور h اونچائی ہے

مثال 15: ایک مخروط کی اونچائی اور تریجی اونچائی بالترتیب 21 cm اور 28 cm ہیں۔ مخروط کا حجم معلوم کیجئے۔

$$\text{حل: } l^2 = r^2 + h^2 \text{ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے}$$

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ cm} = 7\sqrt{7} \text{ cm}$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21 \text{ cm}^2$$

$$= 7546 \text{ cm}^2$$

مثال 16: موزیکا کے پاس کینوس کا ایک ٹکڑا ہے جس کا رقبہ 551 m^2 وہ اس کا استعمال ایک مخروطی ٹینٹ بنانے میں کرتا ہے جس کے قاعدہ کا نصف قطر 7 cm فرض کرتے ہوئے سینے کے لئے مارجن اور کاٹنے وقت برباد ہوم کینوس تقریباً 1 cm ہے تو اس کینوس سے بے ٹینٹ کا حجم معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ کینوس کا رقبہ 551 m^2 کیونکہ برباد ہوا کینوس 1 m^2 ہے، اس لئے ٹینٹ بنانے کے لئے دستیاب کینوس کا

$$550 \text{ m}^2 = (551 - 1) \text{ m}^2$$

اب ٹینٹ کا سطحی رقبہ 550 m^2 اور ٹینٹ کا مطلوبہ قاعدہ کا نصف قطر 7 m

نوٹ کیجیے کہ ٹینٹ میں صرف خمیدہ سطح کا رقبہ ہوتا ہے (ٹینٹ کے فرش کو کینوس سے نہیں ڈھکا جاتا)

$$\text{اس لئے ٹینٹ کی خمیدہ سطح کا رقبہ} = 550 \text{ m}^2$$

$$\text{یعنی، } \pi r l = 550$$

$$\text{یا، } \frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$\text{یا، } l = 3 \frac{550}{22} \text{ m} = 25 \text{ m}$$

$$\text{اب، } l^2 = r^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \text{ m} = \sqrt{625 - 49} \text{ m} = \sqrt{576} \text{ m}$$

$$= 24 \text{ cm}$$

$$\text{اس لیے، مخروطی ٹینٹ کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 \text{ m}^3 = 1232 \text{ m}^3$$

مشق 13.7

جب تک وضاحت نہ کی جائے، $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے

1. ایک قائم دائری مخروط کا حجم معلوم کیجیے جس کا

(i) نصف 6 a اور اونچائی 7 cm ہو (ii) نصف قطر 3.5 cm اور اونچائی 12 cm ہو۔

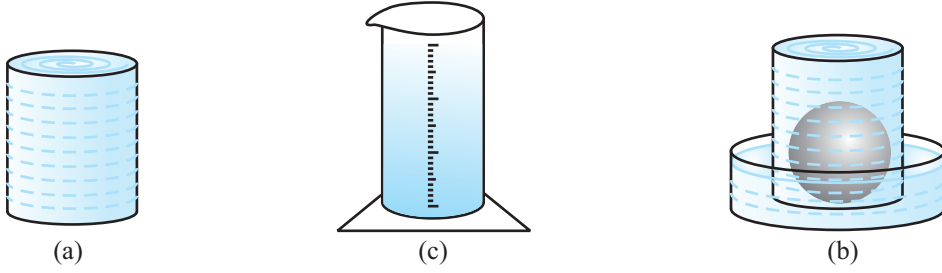
2. ایک مخروطی برتن کی گنجائش لیٹروں میں معلوم کیجیے جس میں
(i) نصف قطر 7cm اور ترچھی اونچائی 25cm ہو (ii) اونچائی 12cm اور ترچھی اونچائی 13cm ہو
3. ایک مخروط کی اونچائی 15cm ہے اگر اس کا حجم 1570cm³ ہے تو قاعدہ کا نصف قطر معلوم کیجیے ($\pi = 3.14$ لیجیے)
4. 9cm اونچائی والے ایک قائم دائری مخروط کا حجم $48\pi\text{cm}^3$ ہے اس کے قاعدہ کا قطر معلوم کیجیے۔
5. ایک مخروطی گڑھا جس کے اوپر کا قطر 3.5cm ہے 12cm گہرا ہے۔ کلومیٹر میں اس کی گنجائش معلوم کیجیے۔
6. ایک قائم دائری مخروط کا حجم 9856cm^3 ہے اگر قاعدہ کا قطر 28cm ہو تو معلوم کیجیے
(i) مخروط کی اونچائی (ii) مخروط کی ترچھی اونچائی (iii) مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ۔
7. ایک قائم زاوی مثلث ABC جس کے اضلاع 5cm، 12cm اور 13cm ہیں کو اس کے لمبائی والے ضلع پر گھمایا گیا۔ اس طرح سے حاصل ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔
8. اگر سوال 7 میں مثلث ABC کو 5cm لمبائی والے ضلع پر گھمایا جائے تو اس طرح سے حاصل ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے اور اس طرح سے حاصل دونوں ٹھوسوں کے حجم میں نسبت بھی معلوم کیجیے۔
9. گیارہوں کا ایک ڈھیر مخروط کی شکل کا ہے جس کا قطر 105cm اور اونچائی 3cm ہے اس کا حجم معلوم کیجیے بارش سے بچانے کے لئے اس ڈھیر کو کیٹوس سے ڈھکا جاتا ہے۔ مطلوبہ کیٹوس کا رقبہ معلوم کیجیے۔

13.9 کرہ کا حجم (Volume of a Sphere)

اس لئے دیکھتے ہیں کہ کرہ کا حجم کس طرح معلوم کریں پہلے مختلف نصف قطر والے دو یا تین کرہ لیجیے اور ایک بڑا برتن لیجیے جس میں الگ ہی وقت میں یہ دونوں کرہ آسانی سے آسکیں۔ ایک بڑا ٹرف (ناند) لیجیے جس میں آپ اس برتن کو رکھ سکیں۔ اور پھر برتن کو کنارے تک پانی سے بھر دیں [شکل (a) 13.30 دیکھیے]۔

اب احتیاط سے کرہ میں سے ایک کو برتن میں رکھئے برتن میں سے کچھ پانی بہہ کر ناند (Through) میں گرے گا جس میں یہ برتن رکھا ہوا ہے شکل (b) 13.30 دیکھیے ناند میں سے پانی ایک پیمائشی استوانہ میں ڈال دیجیے (ایک استوانہ جس میں نشان لگے ہو) اور پانی جو بہہ کر ناند میں آیا ہے۔ اس کی پیمائش کیجیے (شکل (c) 13.30 دیکھیے) مان لیجیے ڈبوئے گئے کرہ کا نصف قطر ہے (آپ کرہ کا قطر معلوم کر کے اس کا نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں) اور پھر $\frac{3}{4}\pi r^3$ کی قدر معلوم کیجیے کیا آپ اس

قدر کو اس بہتے ہوئے پانی کے حجم کے برابر پائیں گے؟



شکل 13.30

اسی عمل کو ایک مختلف سائز والے کرہ کے ساتھ دہرائیے۔

اس کرہ کا نصف قطر R معلوم کیجئے اور پھر $\frac{3}{4}\pi R^3$ کی قدر معلوم کیجیے ایک بار پھر اس کی قدر اس کرہ کے ذرائع ہٹائے گئے پانی کے جمع کے برابر ہوگی۔ اس سے ہم کیا نتیجہ نکالتے ہیں یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ کسی کرہ کا حجم اس کرہ کے ذرائع ہٹائے گئے پانی کے حجم کی پیمائش کے برابر ہے۔ مختلف نصف قطروں کے کروں کے ساتھ اس تجربہ کو دہرائیے۔ آپ دیکھیں گے کہ نتیجہ ایک ہی ہوگا یعنی کرہ کا حجم اس کے نصف قطر کے مکعب کا $\frac{4}{3}\pi$ گنا ہے اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ایک کرہ کا حجم} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

جہاں r کرہ کا نصف قطر ہے۔

اونچی کلاسوں میں ہم اس کو ثابت بھی کیا جاسکتا ہے لیکن اس سیکشن میں ہم اس کو اس طرح ہی کہیں گے جیسے یہ درست ہے۔

کیونکہ نصف کرہ، کرہ کا نصف ہے تو کیا آپ نصف کرہ کے حجم کا اندازہ لگا سکتے ہیں؟

$$\frac{1}{2} \text{ کا } \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = \text{نصف کرہ کا حجم}$$

جہاں r نصف کرہ کا نصف قطر ہے

اس فارمولہ کے استعمال کی وضاحت کے لیے ہم کچھ مثالوں کو لیتے ہیں۔

مثال 17.2a نصف قطر والے کرہ کا حجم معلوم کیجیے۔

حل: مطلوبہ حجم ہے $\frac{4}{3}\pi v^3$

$$5887.32\text{cm}^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2\text{cm}^3 =$$

مثال 18: ایک شوٹ پٹ 4.99 نصف قطر والا ایک کرہ ہے اگر دھات 5 کثافت 7.8g فی ہے تو شوٹ پٹ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: کیونکہ شوٹ پٹ دھات کا بنا ایک ٹھوس کرہ ہے اور اس کی قیمت اس کے حجم اور کثافت کا حاصل ضرب ہے اس لئے ہمیں کرہ کا حجم معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

اب کرہ کا حجم $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9\text{cm}^3$$

$$493\text{cm}^3$$

مزید 1cm دھات کی قیمت ہے 7.8g

اس لئے شوٹ پٹ کی قیمت ہے $7.8 \times 493\text{g}$

$$(تقریباً) = 3.85\text{kg} = 3845.44\text{g}$$

مثال 19: ایک نصف کرہ پیالہ کا نصف قطر 3.5a ہے اس میں موجود پانی کا حجم کیا ہوگا

حل: پیالہ میں جتنا پانی آ سکتا ہے اس کا حجم

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5\text{cm}^2 = 89.9\text{cm}^2$$

مشق 13.8

جب تک وضاحت نہ کی جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے۔

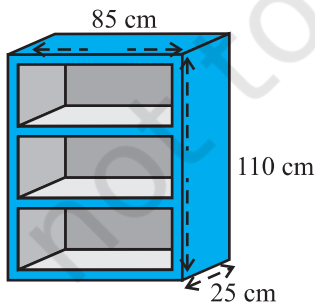
1. کرہ کا حجم معلوم کیجیے جس کا نصف قطر

0.63cm(ii)

7cm(i)

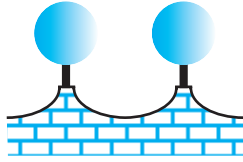
2. ایک ٹھوس کروی گیند کے ذریعہ ہٹائے گئے پانی کی مقدار معلوم کیجیے جس کا قطر
(i) 28 cm (ii) 0.21 m
3. دھات کی ایک گیند کا قطر 4.2 cm گیند کی قیمت معلوم کیجیے اگر دھات کی کثافت 89 g cm^{-3} -
4. چاند کا قطر زمین کے قطر کا تقریباً $\frac{1}{4}$ ہے چاند کا حجم زمین کے حجم کی کونسی کسر ہے؟
5. 10.5 cm قطر والے نصف کروی پیالہ میں کتنے لیٹر دودھ آئیگا
6. 1 نصف کروی ٹینکی 1 cm موٹے تو ہے کی شیٹ کی بنی ہوئی ہے اگر اس کا اندرونی نصف قطر 1 cm ہو تو اس ٹینکی کے بننے میں استعمال ہوئے لوہے کا حجم معلوم کیجیے۔
7. اس کرہ کا حجم معلوم کیجیے جس کا سطحی رقبہ 154 cm^2 ہے۔
8. ایک بلڈنگ کا گنبد نصف کروی شکل کا ہے۔ اندر سے اس کی سفیدی کا کل خرچ 4989.60 روپے ہے اگر سفیدی کا خرچ فی 20 روپے مربع میٹر ہو تو
(i) گنبد کا اندرونی سطحی رقبہ معلوم کیجیے، (ii) گنبد کے اندر موجود ہوا کا حجم معلوم کیجیے
9. 27 ٹھوس لوہے کے کرے جس میں ہر ایک کا نصف قطر r اور سطحی رقبہ S ہے کو پگھلا کر ایک کرہ بنایا گیا جس کا سطحی رقبہ S' ہے معلوم کیجیے (i) نئے کرہ کا نصف قطر r' (ii) s اور s' میں نسبت -
10. دوائیوں کا ایک کیپ سول 3.5 mm قطر والے ایک کرہ کی شکل کا ہے اس کو بھرنے کے لئے mm^3 میں کل کتنی دودھ کی ضرورت ہے۔

مشق 13.9 (اختیاری)



شکل 13.31

1. لکڑی کی ایک الماری کے باہری ابعاد اونچائی 110 cm گہرائی 25 cm چوڑائی 28.5 cm (شکل 13.31 دیکھیے) ہر جگہ بچٹوں کی موٹائی 5 cm ہے اس باہری رخوں پر پالش اور اندرونی رخوں پر پینٹ ہونا ہے اگر پالش کا خرچ 20 پیسے فی مربع سینٹی میٹر اور پینٹ کا خرچ 10 پیسے فی مربع سینٹی میٹر ہے تو الماری کی سطح پر پالش اور پینٹ کرانے کا کل خرچ



شکل 13.32

معلوم کیجیے۔

2. ایک مکان کے سامنے کی دیوار ایک چھوٹے سے سہارے پر رکھیں
21 cm قطر والے کروں سے سجی ہوئی ہے جیسا کہ شکل 13.32 میں
دکھایا گیا ہے اس مقصد کے لئے ایسے 10 کروں کا استعمال ہوا
ان پر سفید رنگ کرنا ہے ہر ایک بہار 1.5 cm نصف قطر
اور 7 cm اونچائی والا ایک استوانہ ہے اور اس کے اوپر کالا رنگ
کرنا ہے رنگ کرنے کا کل خرچ معلوم کیجیے اگر سفید رنگ کرنے
کا خرچ 25 پیسے ہے فی مربع سینٹی میٹر ہے اور کالا رنگ کرنے کا
خرچ 5 پیسے فی مربع سینٹی میٹر ہے۔

3. ایک کرہ کا قطر 25 فیصد کم ہو گیا اس کی خمیدہ سطح کا رقبہ کس فی صد سے گھٹے گا۔

13.10 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1. کعب نما کا سطحی رقبہ ہے $2(lb + bh + hl)$

2. مکعب کا سطحی رقبہ $6a^2$

3. استوانہ کا کل سطحی رقبہ $2\pi r(r + h)$

4. استوانہ کی خمیدہ سطح رقبہ $2\pi rh$

5. مخروط کی خمیدہ سطح کا رقبہ πrh

6. ایک قائم دائری مخروط کا سطحی رقبہ πrl

7. نصف قطر والے کرہ کا سطحی رقبہ $r = 4\pi r^2$

8. نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ $2\pi r^2$

9. نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ $3\pi r^2$

10. کعب نما کا حجم $l \times b \times h$

$$11. \text{ مکعب کا حجم} = a^3$$

$$12. \text{ استوانہ کا حجم} = \pi r^2 h$$

$$13. \text{ مخروط والے کرہ کا حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$14. \text{ نصف قطر والے کرہ کا حجم} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$15. \text{ نصف کرہ کا حجم} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

[یہاں حروف r, a, h, b, l وغیرہ اپنے عام مفہوم میں استعمال ہوئے ہیں۔ جن کا انحصار سیاق و سباق پر ہے۔]